Р. К. Гордин

ГЕОМЕТРИЯ

Планиметрия
7–9 классы

Учебное пособие

3-е издание, исправленное

Москва
Издательство МЦНМО
2006

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721
Г68

Гордин Р. К.

Г68 Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. — 3-е изд., испр. — М.: МЦНМО, 2006. — 416 с.: ил.

ISBN 5-94057-157-3

Книга содержит задачи различной сложности по основным темам школьного курса планиметрии (7–9 классы).

По каждой теме приводятся основные теоретические факты, ключевые задачи, подробные решения наиболее важных задач, задачи на отработку учебных навыков, для углубленного изучения геометрии и олимпиадные задачи. К большинству задач даются ответы, решения или указания.

Книга является дополнительным пособием к действующим учебникам по геометрии и может использоваться как в общеобразовательных, так и в физико-математических школах, а также для подготовки к вступительным экзаменам в вузы.

Предыдущее издание книги вышло в 2004 году.

ББК 22.151я721

Учебное издание

Гордин Рафаил Калманович

ГЕОМЕТРИЯ. ПЛАНИМЕТРИЯ. 7–9 КЛАССЫ

Подписано в печать 09.10.2006 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 26. Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-74-83.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ОАО «Дом печати — ВЯТКА», 610033, г. Киров, ул. Московская, 122.

ISBN 5-94057-157-3

Предисловие

Настоящий сборник задач по геометрии является дополнительным материалом к действующим школьным учебникам. Всего в сборнике более 1250 задач, которые распределены по трем уровням сложности. Задачи каждого уровня не требуют знаний, выходящих за рамки школьной программы. В то же время, если для решения задач первого уровня достаточно добротного знания материала учебника, то задачи второго и тем более третьего уровня подразумевают повышенный интерес к геометрии и более глубокое владение умениями и навыками, полученными на уроках. Задачи второго уровня рассчитаны на наиболее сильных учеников обычного класса и на учеников классов с углубленным изучением математики. Задачи третьего уровня довольно трудны. Большинство из них в разное время предлагалось на различных математических олимпиадах. Есть среди них и известные, ставшие классическими, задачи элементарной геометрии, а также наиболее красивые задачи вступительных экзаменов в вузы.

В начале каждого параграфа приведены основные факты, необходимые для решения содержащихся в нем задач. Приводятся также примеры типичных задач с решениями.

Ко всем задачам на вычисление даются ответы. К наиболее важным с точки зрения составителя задачам (не обязательно наиболее трудным) приводятся решения или указания.

Ключевые задачи отмечены «ноликом» (например, $\mathbf{1.13^0}$). Как правило, утверждения, содержащиеся в таких задачах, являются основой для решения целых циклов содержательных задач школьной геометрии.

При подборе задач использована компьютерная информационно-поисковая система «Задачи» (http://zadachi.mccme.ru), созданная под руководством И. Ф. Шарыгина в Московском центре непрерывного математического образования.

Книга адресована школьникам, желающим самостоятельно научиться решать задачи по геометрии. Кроме того, она может быть эффективно использована учителем для работы на уроках и на занятиях математического кружка, а также для подготовки к вступительным экзаменам в вузы.

Задачи сборника в течение многих лет использовались на уроках геометрии в московской школе № 57.

Выражаю искреннюю благодарность Л. Д. Альтшулеру, А. Буфетову, Б. П. Гейдману, А. А. Суханову, И. Ф. Шарыгину, А. Шеню, оказавшим мне большую помощь советами и замечаниями при подготовке сборника к публикации.

Р. К. Гордин

Раздел первый
7 класс

§ 1.1. Измерение отрезков и углов

Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Каждый отрезок имеет определенную длину, бо́льшую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

На любом луче от его начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, притом только один.

Каждый угол имеет определенную градусную меру, бо́льшую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

От любого луча в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, притом только один.

Пример 1. Точки M, A и B расположены на одной прямой, причем отрезок AM вдвое больше отрезка BM. Найдите AM, если $AB = 6$.

Решение. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими. Если точка M лежит между точками A и B (рис. 1, *а*), то $AM = \frac{2}{3}AB = 4$. Если точка B лежит

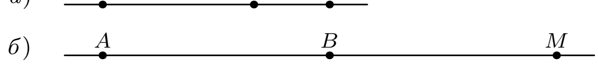


Рис. 1

между точками A и M (рис. 1, *б*), то B — середина AM, поэтому $AM = 2AB = 12$. Точка A не может лежать между точками B и M, так как в этом случае отрезок AM меньше отрезка BM.

Пример 2. Точка C — середина отрезка AB. На отрезках AC и BC взяты соответственно точки M и N, причем $AM : MC = CN : NB$. Докажите, что отрезок MN равен половине отрезка AB.

Решение. Из равенства $AM : MC = CN : NB$ следует равенство $AM : AC = CN : CB$. Обозначим $AM : AC = CN : CB = k$, $AC = CB = a$ (рис. 2). Тогда $AM = kAC = ka$, $MC = AC - AM = a - ka$, $CN = kCB = ka$. Следовательно,

$$MN = MC + CN = a - ka + ka = a = \frac{1}{2}AB.$$

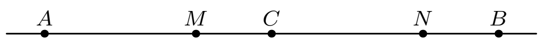


Рис. 2

Пример 3. Один из углов, образованных пересекающимися прямыми a и b, равен $15°$. Прямая a_1 симметрична прямой a относительно прямой b, а прямая b_1 симметрична прямой b относительно a. Найдите углы, образованные прямыми a_1 и b_1.

Решение. Возьмем на прямых a и b, пересекающихся в точке O, соответственно точки A и B, отличные от O (рис. 3). Пусть $\angle AOB = 15°$. Точка A_1, симметричная точке A относительно прямой b, лежит на прямой a_1, причем $\angle A_1OB = \angle AOB = 15°$. Точка B_1, симметричная точке B относительно прямой a, лежит на прямой b_1, причем $\angle B_1OA = \angle BOA = 15°$. Так как луч OB лежит между лучами OA_1 и OA, а луч OA — между OB и OB_1, то $\angle A_1OB_1 = \angle A_1OB + \angle AOB + \angle AOB_1 = 15° + 15° + 15° = 45°$. Следовательно, при пересечении прямых a_1 и b_1 образуются углы, равные $45°$, $45°$, $135°$, $135°$.

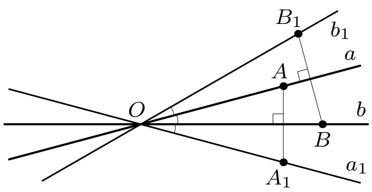


Рис. 3

Задачи первого уровня

1.1. На прямой последовательно откладываются точки A, B, C и D, причем $AB = BC = CD = 6$. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD.

1.2. На прямой последовательно откладываются точки A, B, C, D, E и F, причем $AB = BC = CD = DE = EF$. Найдите отношения $AD : DF$, $AC : AF$, $BD : CF$.

1.3. Точка M — середина отрезка AB, а точка N — середина отрезка MB. Найдите отношения $AM : MN$, $BN : AM$ и $MN : AB$.

1.4. Точка K отрезка AB, равного 12, расположена на 5 ближе к A, чем к B. Найдите AK и BK.

1.5. Точка M расположена на отрезке AN, а точка N — на отрезке BM. Известно, что $AB = 18$ и $AM : MN : NB = 1 : 2 : 3$. Найдите MN.

1.6. На прямой выбраны три точки A, B и C, причем $AB = 1$, $BC = 3$. Чему может быть равно AC? Укажите все возможные варианты.

1.7. На прямой выбраны четыре точки A, B, C и D, причем $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 4$. Чему может быть равно AD? Укажите все возможные варианты.

1.8. На линейке отмечены три деления: 0, 2 и 5. Как отложить с ее помощью отрезок длиной 6?

1.9. На линейке отмечены три деления: 0, 7 и 11. Как отложить с ее помощью отрезок длиной: а) 8; б) 5?

1.10. На прямой взяты точки A, O и B. Точки A_1 и B_1 симметричны соответственно точкам A и B относительно точки O. Найдите A_1B, если $AB_1 = 2$.

1.11. Точка B лежит на отрезке AC длиной 5. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и BC.

1.12. Точки A, B, C последовательно расположены на одной прямой и $AB : BC = 3 : 4$. Найдите отношения $AB : AC$ и $BC : AB$.

1.13$^{\mathbf{0}}$. Точки A, B, C расположены на одной прямой и $AC : BC = 2 : 5$. Найдите отношения $AC : AB$ и $BC : AB$.

1.14$^{\mathbf{0}}$. Точки A, B, C расположены на одной прямой и

$AC : BC = m : n$ (m и n — натуральные числа). Найдите отношения $AC : AB$ и $BC : AB$.

1.15⁰. Точка B делит отрезок AC в отношении $AB : BC = 2 : 1$. Точка D делит отрезок AB в отношении $AD : DB = 3 : 2$. В каком отношении точка D делит отрезок AC?

1.16. Даны точки A и B. Где на прямой AB расположены точки, расстояние от которых до точки A больше, чем до точки B?

1.17. Один из двух смежных углов на $30°$ больше другого. Найдите эти углы.

1.18. Один из двух смежных углов в 3 раза меньше другого. Найдите эти углы.

1.19⁰. Докажите, что биссектрисы двух смежных углов перпендикулярны.

1.20. Докажите, что биссектрисы двух вертикальных углов лежат на одной прямой.

1.21. Луч света, исходящий из точки M, зеркально отразившись от прямой AB в точке C, попал в точку N. Докажите, что биссектриса угла MCN перпендикулярна прямой AB. (Угол падения равен углу отражения.)

1.22. Точка M лежит внутри угла AOB, OC — биссектриса этого угла. Докажите, что угол MOC равен полуразности углов AOM и BOM.

1.23. Точка M лежит вне угла AOB, OC — биссектриса этого угла. Докажите, что угол MOC равен полусумме углов AOM и BOM.

1.24. Из точки на листе бумаги провели четыре луча, делящих плоскость на четыре угла. Затем лист разрезали по биссектрисам этих углов на четыре части (которые также являются углами). Докажите, что два из этих углов образуют в сумме $180°$, и два других — тоже.

Задачи второго уровня

1.25. Даны точки A и B. Где на прямой AB расположены точки, расстояние от которых до точки A: а) вдвое больше, чем до точки B; б) втрое меньше, чем до точки B?

1.26. Даны точки A и B. Для каждой точки M, не совпадающей с точкой B и лежащей на прямой AB, рассмотрим отношение $AM : BM$. Где расположены точки, для которых это отношение: а) больше 2; б) меньше 2?

1.27. Имеется угольник с углом в 70°. Как построить с его помощью угол в 40°?

1.28. Имеется угольник с углом в 19°. Как построить с его помощью угол в 1°?

1.29. Через точку на плоскости провели 10 прямых, после чего плоскость разрезали по этим прямым на углы. Докажите, что хотя бы один из этих углов меньше 20°.

1.30. а) На сколько градусов поворачивается за минуту минутная стрелка? Часовая стрелка?

б) Какой угол образуют минутная и часовая стрелка в 3 часа 5 минут?

в) В полдень минутная и часовая стрелка совпали. Когда они совпадут в следующий раз?

г) Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки совпадают? Образуют развернутый угол? Образуют прямой угол?

Задачи третьего уровня

1.31. В деревне у прямой дороги стоят четыре избы A, B, C и D на расстоянии 50 метров друг от друга. В какой точке дороги надо построить колодец, чтобы сумма расстояний от колодца до всех четырех изб была бы наименьшей?

1.32. В деревне A живет 50 школьников, в деревне B живет 100 школьников. Расстояние между деревнями 3 километра. В какой точке дороги из A в B надо построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, было как можно меньше?

§ 1.2. Признаки равенства треугольников

Первый признак равенства треугольников. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответ-*

ственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

Второй признак равенства треугольников. *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам второго треугольника, то треугольники равны.*

Третий признак равенства треугольников. *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого, то треугольники равны.*

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину этого угла с точкой на противолежащей стороне.

Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Эти стороны называются *боковыми сторонами.* Третья сторона называется *основанием.*

Треугольник называется *равносторонним* (*правильным*), если все его стороны равны.

Свойства равнобедренного треугольника.

1^0. *Углы при основании равнобедренного треугольника равны.*

2^0. *Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является его биссектрисой и высотой.*

Признак равнобедренного треугольника. *Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.*

Пример 1. На сторонах BC и B_1C_1 равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ взяты соответственно точки M и M_1, причем $BM : MC = B_1M_1 : M_1C_1$. Докажите, что $AM = A_1M_1$.

Решение. Из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует, что $\angle B = \angle B_1$ и $AB = A_1B_1$ (рис. 4). Отрезки BM и

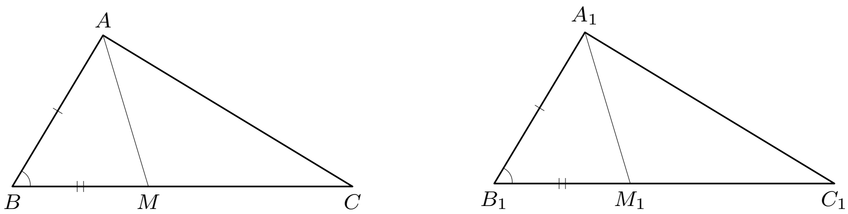


Рис. 4

B_1M_1 составляют одну и ту же часть соответственно от отрезков BC и B_1C_1, поэтому они равны. Тогда треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AM = A_1M_1$.

Пример 2. Постройте[1] равнобедренный треугольник, если даны прямая, на которой лежит медиана, проведенная из вершины, две точки на боковых сторонах и точка на основании.

Решение. Предположим, что искомый равнобедренный треугольник ABC построен (рис. 5). Данные точки M и N лежат на его боковых сторонах AB и AC соответственно, данная точка K — на основании BC, медиана AL — на данной прямой l. Поскольку медиана AL равнобедренного треугольника ABC является также его биссектрисой, а биссектриса есть ось симметрии угла, то точка M_1, симметричная точке M относительно прямой l, лежит на боковой стороне AC. В то же время, медиана AL является также высотой равнобедренного треугольника ABC. Поэтому точка K лежит на прямой, перпендикулярной данной прямой l.

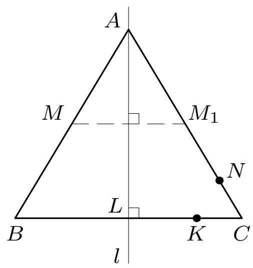


Рис. 5

Отсюда вытекает следующее построение. Строим точку M_1, симметричную данной точке M относительно данной прямой l. Если точка M_1 отлична от данной точки N и прямая M_1N пересекает данную прямую l, задача имеет единственное решение.

[1] Если специально не оговаривается набор инструментов, то задача на построение подразумевает использование циркуля и линейки.

В этом случае прямая M_1N содержит одну из боковых сторон искомого треугольника, а прямая, симметричная ей относительно данной прямой l, — вторую. Основание искомого треугольника получим, проведя через данную точку K прямую, перпендикулярную прямой l. Если прямая M_1N параллельна l, то задача не имеет решений. Если же точка M_1 совпадет с N, задача имеет бесконечно много решений.

Пример 3. Постройте треугольник ABC, если известны сторона AC, острый угол при вершине A и разность сторон AB и BC ($AB > BC$).

Решение. Предположим, что искомый треугольник ABC построен (рис. 6). Пусть $\angle A = \alpha$ — данный угол, $AC = a$ — данная сторона, $AB - BC = b$ — данная разность двух других сторон. На стороне AB отложим отрезок BC_1, равный BC. Тогда

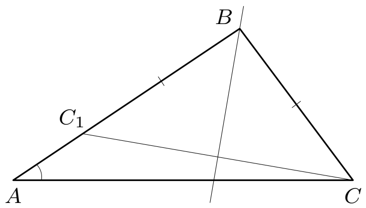


Рис. 6

$$AC_1 = AB - BC_1 = AB - BC = b,$$

а точка B лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CC_1. Отсюда вытекает следующее построение. Строим треугольник ACC_1 по двум сторонам $AC = a$, $AC_1 = b$ и углу между ними: $\angle CAC = \alpha$. Проводим серединный перпендикуляр к отрезку AC_1. Он пересекает луч AC_1 в искомой вершине B. Задача имеет единственное решение.

Задачи первого уровня

1.33. Медиана треугольника делит его на два треугольника, периметры которых равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

1.34. Докажите, что в равных треугольниках соответствующие медианы равны.

1.35. Докажите, что в равных треугольниках соответствующие биссектрисы равны.

1.36. На сторонах вертикальных углов отложены от его вершины равные отрезки OA, OB, OC и OD. Укажите пары равных треугольников с вершинами в точках O, A, B, C и D.

1.37^0. Докажите, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, является также медианой и высотой.

1.38^0. Медиана треугольника является также его высотой. Докажите, что такой треугольник равнобедренный.

1.39. Биссектриса треугольника является его высотой. Докажите, что треугольник равнобедренный.

1.40. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK. Найдите AB, если $BC = 12$.

1.41. Прямая, проведенная через вершину A треугольника ABC перпендикулярно его медиане BD, делит эту медиану пополам. Найдите отношение сторон AB и AC.

1.42. Стороны равностороннего треугольника делятся точками K, L, M в одном и том же отношении (считая по часовой стрелке). Докажите, что треугольник KLM также равносторонний.

1.43^0. Постройте треугольник по трем сторонам. Всегда ли это можно сделать?

1.44^0. Постройте угол, равный данному.

1.45^0. Постройте треугольник:

а) по двум сторонам и углу между ними;

б) по стороне и двум прилежащим к ней углам.

1.46^0. В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M на расстояние, равное AM. Найдите расстояние от полученной точки до вершин B и C, если $AB = c$, $AC = b$.

1.47^0. Биссектриса треугольника является его медианой. Докажите, что треугольник равнобедренный.

1.48. Равны ли треугольники:

а) по двум сторонам и углу;

б) по стороне и двум углам?

1.49^0. Докажите признаки равенства прямоугольных треугольников:

а) по двум катетам;

б) по катету и гипотенузе;

в) по катету и прилежащему острому углу;

г) по гипотенузе и острому углу.

1.50. Постройте треугольник:

а) по двум сторонам и высоте, проведенным из одной вершины;

б) по стороне и высотам, проведенным к двум другим сторонам;

в) по углу, высоте и биссектрисе, проведенным из вершины этого угла;

г) по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и высоте, опущенной на другую сторону.

1.51⁰. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку есть геометрическое место точек, равноудаленных от концов этого отрезка.

1.52. Две различные окружности пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, делит отрезок AB пополам и перпендикулярна ему.

1.53. Разделите отрезок пополам с помощью циркуля и линейки.

Задачи второго уровня

1.54. Докажите признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу.

1.55. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Периметр треугольника ABC равен периметру треугольника ABD, а периметр треугольника ACD — периметру треугольника BCD. Докажите, что $AO = BO$.

1.56. Докажите равенство треугольников:

а) по двум сторонам и медиане, выходящим из одной вершины;

б) по медиане и двум углам, на которые разбивает эта медиана угол треугольника.

1.57. Докажите, что в равных треугольниках соответствующие высоты равны между собой.

1.58. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку является его осью симметрии.

1.59. Докажите, что диагонали четырехугольника с равными сторонами взаимно перпендикулярны.

1.60. Точки M и N — середины равных сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку MN проходит через точку P.

1.61. Две высоты треугольника равны между собой. Докажите, что треугольник равнобедренный.

1.62. Высоты треугольника ABC, проведенные из вершин B и C, пересекаются в точке M. Известно, что $BM = CM$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

1.63^0. Найдите геометрическое место внутренних точек угла, равноудаленных от его сторон.

1.64. Докажите, что биссектриса угла является его осью симметрии.

1.65. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC, пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB, если $BM = 8$, $KC = 1$.

1.66. Через данную точку проведите прямую, пересекающую две данные прямые под равными углами.

1.67. Дана прямая l и точки A и B по разные стороны от нее. Постройте на прямой l такую точку C, чтобы прямая l делила угол ACB пополам.

1.68. Дана прямая l и точки A и B по одну сторону от нее. Луч света, выпущенный из точки A, отразившись от этой прямой в точке C, попадает в точку B. Постройте точку C. (Угол падения равен углу отражения.)

1.69. Внутри острого угла даны точки M и N. Как из точки M направить луч света, чтобы он, отразившись последовательно от сторон угла, попал в точку N?

1.70. Постройте равнобедренный треугольник, если даны две прямые, на которых лежат биссектрисы его углов при вершине и при основании, и по точке на каждой из боковых сторон.

1.71^0. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

1.72. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M, биссектрисы B_1B_2 и C_1C_2 треугольника AB_1C_1 пересекаются в точке N. Докажите, что точки A, M и N лежат на одной прямой.

1.73. Постройте биссектрису угла, вершина которого недоступна.

1.74$^{\mathbf{0}}$. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

1.75. Докажите, что около любого треугольника можно описать окружность, притом единственную.

1.76. Докажите, что две различные окружности не могут иметь более двух общих точек.

1.77. Постройте треугольник, если известны сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.

1.78. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

1.79. Постройте треугольник, если дана одна его вершина и две прямые, на которых лежат биссектрисы, проведенные из двух других вершин.

Задачи третьего уровня

1.80. Из точки вне прямой опустите перпендикуляр на эту прямую с помощью циркуля и линейки, проведя не более трех линий.

1.81$^{\mathbf{0}}$. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей.

1.82. На сторонах AB, BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что если $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$, $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$, то точки A_1, B_1 и C_1 являются основаниями высот треугольника ABC.

1.83. Докажите, что, если в треугольнике один угол равен 120°, то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.

§ 1.3. Параллельность. Сумма углов треугольника

Две прямые называются *параллельными*, если они не имеют ни одной общей точки.

Аксиома параллельных. *Через точку, не лежащую на прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.*

Признак параллельности прямых. *Если при пересечении двух прямых третьей внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.*

Свойство параллельных прямых. *Если две параллельные прямые пересечь третьей, то при этом образуются равные внутренние накрест лежащие углы.*

Теорема об углах треугольника. *Сумма внутренних углов треугольника равна* $180°$.

Теорема о внешнем угле треугольника. *Внешний угол треугольника равен сумме двух не смежных с ним внутренних углов.*

Пример 1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Докажите, что $AC \parallel BD$ и $AD \parallel BC$.

Решение. Треугольники AOC и BOD (рис. 7) равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO$ и $CO = DO$ по условию, а углы AOC и BOD равны как вертикальные), поэтому $\angle OAC = \angle OBD$. Прямая AB пересекает прямые AC и BD, причем накрест лежащие углы OAC и OBD равны, следовательно, прямые AC и BD параллельны. Аналогично, $AD \parallel BC$.

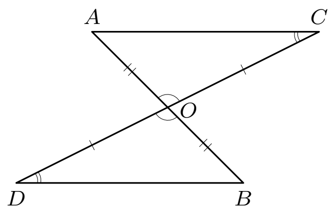


Рис. 7

Пример 2. Две параллельные прямые пересечены третьей. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов.

Решение. Пусть прямые l и m параллельны, а третья прямая пересекает их соответственно в точках A и B (рис. 8). Возьмем на прямой l точку C, а на прямой m — точку D так, чтобы эти точки лежали по одну сторону от прямой AB. Тогда углы BAC и ABD — внутренние односторонние. По свойству

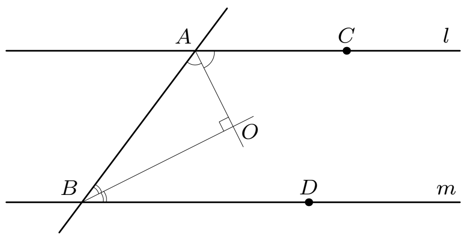


Рис. 8

параллельных прямых $\angle BAC + \angle ABD = 180°$. Пусть биссектрисы этих углов пересекаются в точке O. Тогда

$$\angle OAB + \angle OBA = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABD = \\ = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABD) = \frac{180°}{2} = 90°.$$

Следовательно, по теореме о сумме углов треугольника

$$\angle AOB = 180° - (\angle OAB + \angle OBA) = 180° - 90° = 90°.$$

Пример 3. Докажите, что угол между высотой и биссектрисой, проведенными из одной вершины треугольника, равен полуразности двух других его углов.

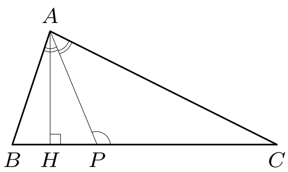


Рис. 9

Решение. Пусть AH и AP — соответственно высота и биссектриса треугольника ABC (рис. 9). Обозначим $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Если $\beta = \gamma$, то утверждение очевидно. Предположим, что $\beta > \gamma$. Тогда APC — внешний угол треугольников AHP и ABP, поэтому

$$\angle HAP = \angle APC - \angle AHC = \angle ABP + \angle BAP - \angle AHC = \\ = \beta + \frac{180° - \beta - \gamma}{2} - 90° = \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Если $\beta < \gamma$, то аналогично докажем, что $\angle HAP = \frac{\gamma - \beta}{2}$.

Пример 4. Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и сумме катетов.

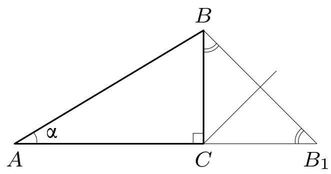


Рис. 10

Решение. Предположим, что искомый прямоугольный треугольник ABC построен (рис. 10). Пусть $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$ — данный угол, $AC + CB = a$ — данная сумма катетов. На продолжении катета AC за точку C отложим отрезок CB_1, равный BC. Тогда

$$AB_1 = AC + CB_1 = AC + BC = a, \qquad \angle AB_1B = 45^\circ,$$

а точка C лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BB_1. Отсюда вытекает следующее построение. Треугольник ABB_1 строим по стороне $AB_1 = a$ и двум прилежащим к ней углам: $\angle A = \alpha$, $\angle B_1 = 45^\circ$. Проводим серединный перпендикуляр к стороне BB_1. Он пересекает отрезок AB_1 в искомой вершине C.

Задачи первого уровня

1.84^0. Через точку, не лежащую на данной прямой, проведите прямую, параллельную данной.

1.85^0. Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

1.86. Докажите, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую.

1.87. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Докажите, что $AC \parallel BD$ и $AD \parallel BC$.

1.88. Точки A и D лежат на одной из двух параллельных прямых, точки B и C — на другой, причем прямые AB и CD также параллельны. Докажите, что противоположные углы четырехугольника $ABCD$ равны между собой.

1.89. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой AC. Образовавшиеся при этом три угла с вершиной B относятся как $3 : 10 : 5$. Найдите углы треугольника ABC.

1.90. Через середину M отрезка с концами на двух параллельных прямых проведена прямая, пересекающая эти прямые в точках A и B. Докажите, что M также середина AB.

1.91. Внешние углы треугольника ABC при вершинах A и C

равны 115° и 140°. Прямая, параллельная прямой AC, пересекает стороны AB и AC в точках M и N. Найдите углы треугольника BMN.

1.92. Через точку M, лежащую внутри угла с вершиной A, проведены прямые, параллельные сторонам угла и пересекающие эти стороны в точках B и C. Известно, что $\angle ACB = 50^\circ$, а угол, смежный с углом ACM, равен 40°. Найдите углы треугольников BCM и ABC.

1.93. Расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Докажите, что расстояние от каждой точки одной из двух параллельных прямых до второй прямой постоянно.

1.94$^{\mathbf{0}}$. Найдите геометрическое место точек, удаленных от данной прямой на данное расстояние.

1.95. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на одну из них.

1.96. AD — биссектриса треугольника ABC. Точка M лежит на стороне AB, причем $AM = MD$. Докажите, что $MD \parallel AC$.

1.97. Точки A и D лежат на одной из двух параллельных прямых, точки B и C — на другой, причем прямые AB и CD также параллельны. Докажите, что $AB = CD$ и $AD = BC$.

1.98. Углы треугольника относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите отношение внешних углов треугольника.

1.99. Докажите, что прямая, проходящая через середины боковых сторон равнобедренного треугольника, параллельна основанию.

1.100. Две параллельные прямые пересечены третьей. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов.

1.101. Прямая пересекает параллельные прямые a и b в точках A и B соответственно. Биссектриса одного из образовавшихся углов с вершиной B пересекает прямую a в точке C. Найдите AC, если $AB = 1$.

1.102. Докажите, что высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, вдвое меньше гипотенузы.

1.103. Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.

1.104. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC, причем $\angle ABM = \angle ACB$ и $\angle CBN = \angle BAC$. Докажите, что треугольник BMN равнобедренный.

1.105. Угол при основании BC равнобедренного треугольника ABC вдвое больше угла при вершине A, BD — биссектриса треугольника. Докажите, что $AD = BC$.

1.106. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке M. При этом $BM = AB$, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle CAM = 15^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

1.107. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N, причем $MN \parallel AB$ и $MN = AM$. Найдите угол BAN, если $\angle B = 45^\circ$ и $\angle C = 60^\circ$.

1.108. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке M, причем $BM = AB$. Найдите разность углов BAM и CAM, если $\angle ACB = 25^\circ$.

1.109. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$). Отрезок AM делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями AB и MC. Найдите угол B.

Задачи второго уровня

1.110. Прямая пересекает боковую сторону AC, основание BC и продолжение боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC за точку B в точках K, L и M соответственно. При этом треугольники CKL и BML получаются также равнобедренными. Найдите их углы.

1.111. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся ею в отношении $AO : OB = CO : OD = 1 : 2$. Прямые AD и BC пересекаются в точке M. Докажите, что треугольник DMB равнобедренный.

1.112. BK — биссектриса треугольника ABC. Известно, что $\angle AKB : \angle CKB = 4 : 5$. Найдите разность углов A и C треугольника ABC.

1.113. Два угла треугольника равны 10° и 70°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины третьего угла треугольника.

1.114. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию. Верно ли обратное?

1.115. Биссектрисы двух углов треугольника пересекаются под углом 110°. Найдите третий угол треугольника.

1.116⁰. Один из углов треугольника равен α. Найдите угол между биссектрисами двух других углов.

1.117⁰. Один из углов треугольника равен α. Найдите угол между высотами, проведенными из вершин двух других углов.

1.118. Высоты остроугольного треугольника ABC, проведенные из вершин A и B, пересекаются в точке H, причем $\angle AHB = 120^\circ$, а биссектрисы, проведенные из вершин B и C, — в точке K, причем $\angle BKC = 130^\circ$. Найдите угол ABC.

1.119. Существует ли треугольник, две биссектрисы которого перпендикулярны?

1.120⁰. Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

1.121⁰. Катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы. Докажите, что угол, противолежащий этому катету, равен 30°.

1.122. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°, а гипотенуза равна 8. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла.

1.123. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен 108°. Перпендикуляр к биссектрисе AD этого треугольника, проходящий через точку D, пересекает сторону AC в точке E. Докажите, что $DE = BD$.

1.124. Докажите, что биссектрисы равностороннего треугольника делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника.

1.125. В треугольнике ABC угол A равен 60°, а биссектриса угла A, медиана, проведенная из вершины B, и высота, проведенная из вершины C, пересекаются в одной точке. Найдите остальные углы треугольника.

1.126. Дана незамкнутая ломаная $ABCD$, причем $AB = CD$ и $\angle ABC = \angle BCD$. Докажите, что $AD \parallel BC$.

1.127. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке K. Известно, что $AC \parallel BD$. Докажите, что треугольники AKC и BKD равнобедренные.

1.128^{0}. Медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Докажите, что треугольник прямоугольный.

1.129. Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведенной из вершины прямого угла.

1.130. На стороне AB квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник ABM. Найдите угол DMC.

1.131. На сторонах AC и BC равностороннего треугольника ABC построены внешним образом равнобедренные прямоугольные треугольники ACN и BCM с прямыми углами при вершинах A и C соответственно. Докажите, что $BM \perp BN$.

1.132. Биссектриса внутреннего угла при вершине A и биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle BMC$, если $\angle BAC = 40^\circ$.

1.133^{0}. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

1.134. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, проведенной к гипотенузе.

1.135. Кошка сидит на середине лестницы, прислоненной к стене. Концы лестницы начинают скользить по стене и полу. Какова траектория движения кошки?

1.136. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°. Докажите, что высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, делят его на три равные части.

1.137. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°. Докажите, что в этом треугольнике отрезок перпендикуляра, проведенного к гипотенузе через ее середину до пересечения с катетом, втрое меньше большего катета.

1.138. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1, один из острых углов равен 15°. Найдите гипотенузу.

1.139. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и высоты AA_2, BB_2, CC_2. Докажите, что длина ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ равна периметру треугольника ABC.

1.140. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$ (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки). Из точек E и F на прямую AB опущены перпендикуляры EM и FN. Докажите, что $EM + FN = AB$.

1.141. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$ (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки), P — середина KD. Докажите, что $CP \perp AB$.

1.142. Даны точки A и B. Пользуясь только циркулем, удвойте отрезок AB, т. е. постройте такую точку C, чтобы точки A, B и C лежали на одной прямой и $AC = 2BC$.

1.143. Какие значения может принимать: а) наибольший угол треугольника; б) наименьший угол треугольника; в) средний по величине угол треугольника?

1.144⁰. Найдите сумму внутренних углов: а) четырехугольника; б) выпуклого пятиугольника; в) выпуклого n-угольника.

1.145. Найдите сумму пяти углов при вершинах пятиконечной звезды (рис. 11).

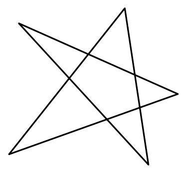


Рис. 11

1.146. Докажите, что в каждом девятиугольнике есть пара диагоналей, угол между которыми меньше $7°$.

1.147. Найдите сумму внешних углов при вершинах выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине.

1.148. На продолжениях гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC за точки A и B соответственно взяты точки K и M, причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол MCK.

1.149. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M, причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол MCK.

1.150. На одной из сторон данного острого угла лежит точка A. Постройте на этой же стороне угла точку, равноудаленную от второй стороны угла и от точки A.

1.151⁰. Постройте треугольник, если заданы сторона, противолежащий ей угол и сумма двух других сторон.

1.152. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

1.153. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL. Докажите, что треугольник AKL правильный.

1.154. На каждой стороне правильного треугольника взято по точке. Стороны треугольника с вершинами в этих точках перпендикулярны сторонам исходного треугольника. В каком отношении каждая из взятых точек делит сторону исходного треугольника?

1.155. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, точка L расположена на диагонали AC, причем $AL : LC = 3 : 1$. Найдите угол KLD.

1.156. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противолежащую сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен его основанию. Докажите, что эта биссектриса также равна основанию треугольника.

1.157. Высота и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол треугольника на три равные части. Найдите углы треугольника.

1.158. В треугольнике ABC угол B равен $20°$, угол C равен $40°$. Биссектриса AD равна 2. Найдите разность сторон BC и AB.

1.159. Постройте равнобедренный треугольник, если заданы основания его биссектрис.

Задачи третьего уровня

1.160. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в 2 раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

1.161. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AE = AD$, $AC = AB$ и $\angle DAC = \angle AEB + \angle ABE$. Докажите, что DC в два раза больше медианы AK треугольника ABE.

1.162. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, вдвое меньше другой биссектрисы. Найдите углы треугольника.

1.163. В треугольнике ABC с углом B, равным $120°$, биссектрисы AE, BD и CM пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle DMO = 30°$.

§ 1.4. Геометрические построения. Окружность

Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (называемой *центром* окружности).

Расстояние от точек окружности до ее центра называется *радиусом* окружности.

Отрезок, соединяющий любую точку окружности с центром, также называют *радиусом.*

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой.*

Диаметром окружности называется хорда, проходящая через центр.

Теорема. *Около любого треугольника можно описать единственную окружность. Центр окружности, описанной около треугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров его сторон.*

Основные построения с помощью циркуля и линейки.

1. *Суммы и разности двух отрезков.*
2. *Треугольника по трем сторонам.*
3. *Угла, равного данному.*
4. *Суммы и разности двух углов.*
5. *Треугольника по двум сторонам и углу между ними.*
6. *Треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам.*
7. *Середины отрезка.*

8. *Прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.*

9. *Биссектрисы угла.*

10. *Прямоугольного треугольника*: *а*) *по двум катетам*; *б*) *по катету и гипотенузе*; *в*) *по катету и острому углу*; *г*) *по гипотенузе и острому углу.*

11. *Прямой, проходящей через данную точку, параллельно данной прямой.*

Пример 1. Докажите, что равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

Решение. Пусть AB и A_1B_1 — равные хорды окружности с центром O, не являющиеся диаметрами (рис. 12). Расстояния от центра окружности до этих хорд равны перпендикулярам OM и OM_1, опущенным на хорды из центра окружности. Поскольку M и M_1 — середины хорд, $AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}A_1B_1 = A_1M_1$. Значит, прямоугольные треугольники AMO и A_1M_1O равны по катету и гипотенузе (радиус окружности). Следовательно, $OM = OM_1$. Если AB и A_1B_1 — диаметры, утверждение очевидно.

Пример 2. На отрезке AB как на диаметре построена окружность. Докажите, что из всех точек окружности, отличных от A и B, отрезок AB виден под прямым углом.

Решение. Пусть точка M, отличная от A и B, лежит на указанной окружности (рис. 13). Тогда медиана MO треугольника AMB (радиус окружности) равна половине стороны AB (диаметр окружности). Следовательно, $\angle AMB = 90^\circ$ (см. задачу **1.128⁰**).

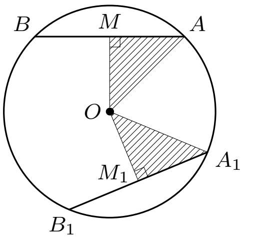


Рис. 12

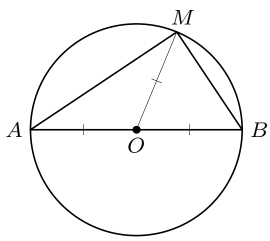


Рис. 13

Пример 3. Две окружности пересекаются в точках A и B, AM и AN — диаметры окружностей. Докажите, что точки M, N и B лежат на одной прямой.

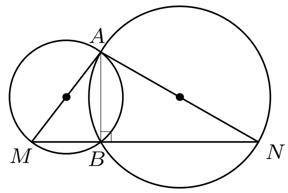


Рис. 14

Решение. Поскольку точка B лежит на окружности с диаметром AM, $\angle ABM = 90^\circ$ (рис. 14). Аналогично, $\angle ABN = 90^\circ$. Следовательно, точки M и N лежат на прямой, перпендикулярной AB и проходящей через точку B.

Задачи первого уровня

1.164$^{\mathbf{0}}$. Докажите следующие свойства окружности:

а) диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам;

б) диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде;

в) окружность симметрична относительно каждого своего диаметра;

г) дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны;

д) хорды, удаленные от центра окружности на равные расстояния, равны.

1.165. Постройте окружность данного радиуса, высекающую на данной прямой отрезок, равный данному.

1.166. Через точку окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

1.167. Через точку A окружности с центром O проведены диаметр AB и хорда AC. Докажите, что угол BAC вдвое меньше угла BOC.

1.168. Угол между радиусами OA и OB окружности равен 60°. Найдите хорду AB, если радиус окружности равен R.

1.169. Разделите окружность с данным центром на 6 равных частей, пользуясь только циркулем.

1.170. Найдите угол между радиусами OA и OB, если расстояние от центра O окружности до хорды AB: а) вдвое меньше AB; б) вдвое меньше OA.

1.171. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности.

1.172. Дана окружность с центром O. На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC, равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (D — точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$.

1.173. Даны две концентрические окружности и пересекающая их прямая. Докажите, что отрезки этой прямой, заключенные между окружностями, равны.

1.174. Равные хорды окружности с центром O пересекаются в точке M. Докажите, что MO — биссектриса угла между ними.

1.175. Прямая, проходящая через общую точку A двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках B и C соответственно. Расстояние между проекциями центров окружностей на эту прямую равно 12. Найдите BC, если известно, что точка A лежит на отрезке BC.

1.176. Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

1.177. В круге даны две взаимно перпендикулярные хорды. Каждая из них делится другой хордой на отрезки, равные a и b ($a < b$). Найдите расстояние от центра окружности до каждой хорды.

1.178. Рассматриваются все хорды окружности, имеющие заданную длину. Найдите геометрическое место их середин.

1.179. Докажите, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.

1.180$^{\mathbf{0}}$. Найдите геометрическое место точек M, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом (т. е. $\angle AMB = 90^\circ$).

1.181. Найдите центр данной окружности с помощью чертежного угольника.

1.182. BM и CN — высоты треугольника ABC. Докажите, что точки B, N, M и C лежат на одной окружности.

1.183. Через точку A, лежащую на окружности, проведены диаметр AB и хорда AC, причем $AC = 8$ и $\angle BAC = 30°$. Найдите хорду CM, перпендикулярную AB.

1.184. Через концы диаметра окружности проведены две хорды, пересекающиеся на окружности и равные 12 и 16. Найдите расстояния от центра окружности до этих хорд.

1.185. Известно, что AB — диаметр окружности, а хорды AC и BD параллельны. Докажите, что $AC = BD$, а CD — также диаметр.

1.186. Биссектрисы внутреннего и внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках P и Q. Докажите, что окружность, построенная на отрезке PQ как на диаметре, проходит через точку A.

1.187. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K. Найдите CK, если $AC = 2$ и $\angle A = 30°$.

1.188. Докажите, что окружность, построенная на стороне равностороннего треугольника как на диаметре, проходит через середины двух других сторон треугольника.

1.189. Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.

1.190. Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

Задачи второго уровня

1.191. В окружности проведены хорды AB и CD. Расстояние между равными параллельными хордами AB и CD равно радиусу окружности. Найдите угол между пересекающимися прямыми AC и BD.

1.192. Продолжения равных хорд AB и CD окружности соответственно за точки B и C пересекаются в точке P. Докажите, что треугольники APD и BPC равнобедренные.

1.193. Продолжения хорд AB и CD окружности с диаметром AD пересекаются под углом $25°$. Найдите острый угол между хордами AC и BD.

1.194. Окружность, построенная на биссектрисе AD треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC соответственно в точках M и N, отличных от A. Докажите, что $AM = AN$.

1.195. Найдите внутри треугольника ABC такую точку P, чтобы общие хорды каждой пары окружностей, построенных на отрезках PA, PB и PC как на диаметрах, были равны.

1.196. Центр окружности, описанной около треугольника, симметричен центру окружности, вписанной в этот треугольник, относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.

1.197. Докажите, что отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, лежит на прямой BC.

1.198. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу пополам. Найдите углы треугольника.

1.199. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении $1:3$. Найдите острые углы треугольника.

1.200. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружность с диаметром AB в точке K, отличной от A, а окружность с центром B — в точках M и N. Докажите, что $MK = KN$.

1.201. Найдите геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на прямые, проходящие через другую данную точку.

1.202. Через данную точку окружности проведите хорду, которая бы делилась данной хордой пополам.

1.203. Впишите в окружность прямоугольный треугольник, катеты которого проходили бы через две данные точки.

1.204. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и проекции одного из катетов на гипотенузу.

1.205. Дана окружность и две неравные параллельные хорды. Используя только линейку, разделите эти хорды пополам.

1.206. Постройте центр данной окружности с помощью двусторонней линейки, если известно, что ширина линейки меньше диаметра окружности.

1.207. Постройте окружность данного радиуса, высекающую на сторонах данного острого угла равные отрезки данной длины.

1.208. Постройте окружность, на которой стороны данного треугольника высекают три хорды, равные заданному отрезку.

1.209. Дан острый угол и две точки внутри него. Постройте окружность, проходящую через эти точки и высекающую на сторонах угла равные отрезки.

1.210. Докажите, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC, точки B и C, а также точка пересечения биссектрис внешних углов с вершинами B и C лежат на одной окружности.

1.211. Точки A, B, C и D последовательно расположены на окружности, причем центр O окружности расположен внутри четырехугольника $ABCD$. Точки K, L, M и N — середины отрезков AB, BC, CD и AD соответственно. Докажите, что $\angle KON + \angle MOL = 180°$.

1.212. Постройте прямую, перпендикулярную данной прямой и проходящую через данную на ней точку, проведя не более трех линий.

1.213. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек, каждая из которых симметрична точке A относительно некоторой прямой, проходящей через точку B.

1.214^{0}. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую, часть которой внутри окружностей была бы равна данному отрезку (центры окружностей расположены по разные стороны от общей хорды).

1.215. Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую, на которой окружности высекают хорды, сумма которых наибольшая (центры окружностей расположены по разные стороны от их общей хорды).

1.216. На сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах построены четыре окружности. Докажите, что общая хорда окружностей, построенных на двух соседних сторонах, параллельна общей хорде двух других окружностей.

1.217. На сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах построены четыре круга. Докажите, что они покрывают весь четырехугольник.

Задачи третьего уровня

1.218. Дана окружность, ее диаметр AB и точка C на этом диаметре. Постройте на окружности две точки X и Y, симметричные относительно диаметра AB, для которых прямая YC перпендикулярна прямой XA.

1.219. Даны окружность, ее центр и две точки A и B, не лежащие на окружности. Пользуясь только циркулем, постройте точки пересечения окружности с прямой AB, если известно, что эта прямая не проходит через центр окружности.

§ 1.5. Касательная к окружности

Касательной к окружности называется прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку (называемую *точкой касания*).

Теорема о касательной. *Радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.*

Теорема (обратная). *Если прямая, проходящая через точку, лежащую на окружности, перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной к окружности.*

Пример 1. Угол с вершиной C равен 120°. Окружность радиуса R касается сторон угла в точках A и B. Найдите AB.

Решение. Пусть O — центр окружности (рис. 15). Из равенства прямоугольных треугольников AOC и BOC (по катету и гипотенузе) следует, что $\angle ACO = \angle BCO = 60^\circ$, значит, $\angle AOC = \angle BOC = 30^\circ$ и $\angle AOB = 60^\circ$, поэтому треугольник AOB равносторонний. Следовательно, $AB = AO = R$.

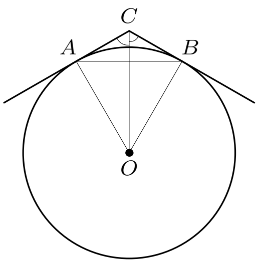


Рис. 15

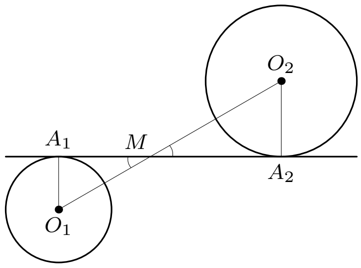


Рис. 16

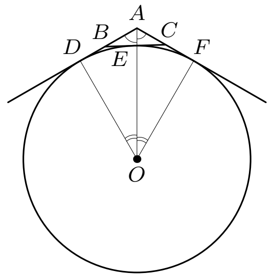


Рис. 17

Пример 2. Окружности, центры которых расположены по разные стороны от некоторой прямой, касаются этой прямой. Линия центров пересекает прямую под углом, равным 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей, если их радиусы равны r и R.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов r и R соответственно (рис. 16), A_1 и A_2 — их точки касания с данной прямой, M — точка пересечения прямых A_1A_2 и O_1O_2. В прямоугольных треугольниках A_1O_1M и A_2O_2M углы A_1MO_1 и A_2MO_2 равны по 30°, поэтому

$$O_1M = 2O_1A_1 = 2r \quad \text{и} \quad O_2M = 2A_2O_2 = 2R.$$

Следовательно, $O_1O_2 = O_1M + O_2M = 2(r + R)$.

Пример 3. Угол при вершине A треугольника ABC равен 120°. Окружность касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Докажите, что расстояние от вершины A до центра окружности равно периметру треугольника ABC.

Решение. Пусть O — центр окружности (рис. 17), D, E и F — точки касания с прямыми AB, BC и AC соответственно, $2p$ — периметр треугольника ABC. Тогда $AD = AF$, $BE = BD$ и $CE = CF$. Поэтому

$$\begin{aligned} 2p &= AB + BC + AC = \\ &= AB + (BE + EC) + AC = (AB + BE) + (EC + AC) = \\ &= (AB + BD) + (CF + AC) = AD + AF, \end{aligned}$$

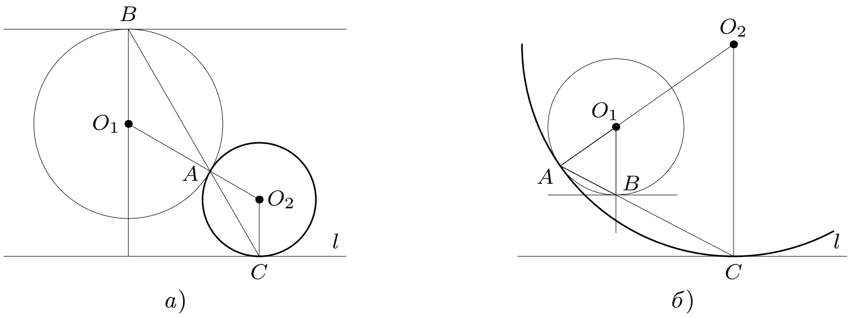


Рис. 18

значит, $AD = AF = p$. Поскольку луч AO — биссектриса угла DAC, то $\angle DAO = 60^\circ$. Из прямоугольного треугольника ADO находим, что $AO = 2AD = 2p$.

Пример 4. Постройте окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в данной на ней точке.

Решение. Предположим, задача решена. Пусть построенная окружность с центром O_2 касается данной прямой l в данной точке C, а данной окружности с центром O_1 — в точке A (рис. 18, *а*).

Пусть прямая AC вторично пересекает данную окружность в точке B. Тогда касательная, проведенная к этой окружности в точке B, параллельна прямой l, а точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой.

Отсюда вытекает следующее построение. Проведем касательную к данной окружности, параллельную данной прямой l. Пусть B — точка касания, а прямая BC пересекает данную окружность в точке A. Тогда центр O_2 искомой окружности найдем как точку пересечения перпендикуляра к прямой l, восставленного из точки C, и прямой O_1A.

Если данная окружность не имеет с прямой l общих точек, задача имеет два решения (рис. 18, *а, б*).

Задачи первого уровня

1.220. Докажите, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.

1.221⁰. Через точку M проведены две касательные MA и MB к окружности (A и B — точки касания). Докажите, что $MA = MB$.

1.222. Точки A и B лежат на окружности. Касательные к окружности, проведенные через эти точки, пересекаются в точке C. Найдите углы треугольника ABC, если $AB = AC$.

1.223. Расстояние от точки M до центра O окружности равно диаметру. Через точку M проведены две прямые, касающиеся окружности в точках A и B. Найдите углы треугольника AOB.

1.224. Хорда большей из двух концентрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.

1.225⁰. Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на его биссектрисе.

1.226. Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C. Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.

1.227. Две прямые, пересекающиеся в точке C, касаются окружности в точках A и B. Известно, что $\angle ACB = 120^\circ$. Докажите, что сумма отрезков AC и BC равна отрезку OC.

1.228⁰. Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.

1.229. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC. В треугольник ABD и ACD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2. Докажите, что отрезок O_1O_2 виден из точки D под прямым углом.

1.230. Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с центром вписанной окружности. Найдите углы треугольника.

1.231⁰. В прямой угол вписана окружность радиуса R, касающаяся сторон угла в точках A и B. Через некоторую точку на меньшей дуге AB окружности проведена касательная, отсекающая от данного угла треугольник. Найдите его периметр.

1.232. К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной, равной a, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

1.233. К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной a, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

1.234. Прямая, параллельная хорде AB, касается окружности в точке C. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

1.235. Точка A лежит вне данной окружности с центром O. Окружность с диаметром OA пересекается с данной в точках B и C. Докажите, что прямые AB и AC — касательные к данной окружности.

1.236. Из точки M, лежащей вне двух концентрических окружностей, проведены четыре прямые, касающиеся окружностей в точках A, B, C и D. Докажите, что точки M, A, B, C, D расположены на одной окружности.

1.237^{0}. Через данную точку проведите касательную к данной окружности.

1.238. Постройте треугольник, если известны отрезки, на которые вписанная окружность делит его сторону, и радиус вписанной окружности.

1.239. Постройте касательную к данной окружности, параллельную данной прямой.

1.240. Две прямые, проходящие через точку M, лежащую вне окружности с центром O, касаются окружности в точках A и B. Отрезок OM делится окружностью пополам. В каком отношении отрезок OM делится прямой AB?

1.241. Точка D — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник ACD, касается отрезка CD в его середине. Найдите острые углы треугольника ABC.

Задачи второго уровня

1.242. Постройте хорду данной окружности, равную и параллельную заданному отрезку.

1.243. Окружность проходит через вершину C и середины D и E сторон BC и AC равностороннего треугольника ABC. Докажите, что прямая, проходящая через середины сторон AB и BC, — касательная к окружности.

1.244. Постройте прямую, касающуюся данной окружности в данной точке, не используя центр окружности.

1.245. Окружность вписана в треугольник со сторонами, равными a, b и c. Найдите отрезки, на которые точка касания делит сторону, равную a.

1.246. Окружность вписана в пятиугольник со сторонами, равными a, b, c, d и e. Найдите отрезки, на которые точка касания делит сторону, равную a.

1.247. Прямая касается окружности с центром O в точке A. Точка C на этой прямой и точка D на окружности расположены по разные стороны от прямой OA. Найдите угол CAD, если угол AOD равен $110°$.

1.248. Прямая касается окружности с центром O в точке A. Точка C на этой прямой и точка D на окружности расположены по одну сторону от прямой OA. Докажите, что угол CAD вдвое меньше угла AOD.

1.249. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и радиусу вписанной окружности.

1.250. Проведите к данной окружности касательную, от которой данная прямая отсекала бы данный отрезок, т. е. чтобы один конец отрезка лежал на прямой, а второй — на окружности.

1.251. Постройте точку так, чтобы касательные, проведенные из нее к двум данным окружностям, были равны данным отрезкам.

1.252$^{\mathbf{0}}$. Докажите, что если окружность касается всех сторон четырехугольника, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны между собой.

1.253. Окружность высекает на сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

1.254. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M и продолжений двух других сторон. Докажите, что прямая AM делит треугольник на два треугольника с равными периметрами.

1.255. В равнобедренный треугольник с основанием, равным a, вписана окружность и к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три маленьких треугольника, сумма периметров которых равна b. Найдите боковую сторону данного треугольника.

1.256. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, M и N. Найдите угол KMN, если $\angle A = 70^\circ$.

1.257. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, L и M. Известно, что $\angle KLM = \alpha$. Найдите $\angle BOC$.

1.258^0. Пусть r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Докажите, что $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

1.259. CH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведенная из вершины прямого угла. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACH, BCH и ABC, равна CH.

1.260^0. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M. Пусть $AM = x$, $BC = a$, полупериметр треугольника равен p. Докажите, что $x = p - a$.

1.261. CD — медиана треугольника ABC. Окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются отрезка CD в точках M и N. Найдите MN, если $AC - BC = 2$.

1.262. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка D, причем $BD - AD = 4$. Найдите расстояние между точками, в которых окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются отрезка CD.

1.263^0. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M, а продолжений сторон AB и AC — в точках N и P соответственно. Вписанная в этот треугольник окружность касается стороны BC в точке K, а стороны AB — в точке L. Докажите, что: а) отрезок AN равен полупериметру треугольника ABC; б) $BK = CM$; в) $NL = BC$.

1.264. В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две бо́льшие стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

1.265. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник заданного периметра.

1.266. Прямая, проходящая через центры двух окружностей, называется их линией центров. Докажите, что общие внешние (внутренние) касательные к двум окружностям пересекаются на линии центров этих окружностей.

1.267$^{\mathbf{0}}$. Постройте общие касательные к двум данным окружностям.

1.268$^{\mathbf{0}}$. Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точка касания окружностей). Докажите, что линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания.

1.269. Докажите, что две окружности касаются тогда и только тогда, когда они касаются некоторой прямой в одной и той же точке.

1.270. Две окружности касаются внешним (внутренним) образом. Докажите, что сумма (разность) их радиусов равна расстоянию между центрами. Верно ли обратное?

1.271. Окружность с центром O касается в точке A внутренним образом большей окружности. Из точки B большей окружности, диаметрально противоположной точке A, проведена хорда BC большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке M. Докажите, что $OM \parallel AC$.

1.272. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекает их общую касательную, проходящую через точку K, в точке M. Докажите, что $\angle O_1MO_2 = \angle AKB = 90^\circ$.

1.273. В острый угол, равный 60°, вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Радиус меньшей окружности равен r. Найдите радиус большей окружности.

1.274. Две окружности касаются внутренним образом. Известно, что два радиуса большей окружности, угол между которыми равен 60°, касаются меньшей окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

1.275⁰. Две окружности касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает эти окружности вторично в точках B и C соответственно. Докажите, что касательные, проведенные к этим окружностям в точках B и C, параллельны.

1.276. Постройте окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности в данной на ней точке.

1.277. В четырехугольнике $MNPQ$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон MN, NP и PQ, а другая — сторон MN, MQ и PQ. Точки B и A лежат соответственно на сторонах MN и PQ, причем отрезок AB касается обеих окружностей. Найдите сторону MQ, если $NP = b$ и периметр четырехугольника $BAQM$ больше периметра четырехугольника $ABNP$ на $2p$.

Задачи третьего уровня

1.278. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1, причем $AC_1 = AB_1$, $BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

1.279. Постройте окружности с центрами в трех данных точках, попарно касающиеся друг друга внешним образом.

1.280. Даны три точки A, B и C. Постройте три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

1.281⁰. Суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны между собой. Докажите, что все стороны четырехугольника касаются некоторой окружности.

§ 1.6. Геометрическое место точек

Геометрическое место точек, удаленных от данной точки на заданное положительное расстояние, — окружность.

Геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, — серединный перпендикуляр к отрезку.

Геометрическое место внутренних точек угла, равноудаленных от его сторон, — биссектриса угла.

Геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой, — две параллельные прямые.

Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом, — окружность без двух точек.

Пример 1. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся данной прямой в данной точке.

Решение. Пусть окружность с центром O касается данной прямой l в данной точке M (рис. 19). Поскольку радиус OM, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной l, то точка O лежит на прямой m, проходящей через точку M перпендикулярно прямой l.

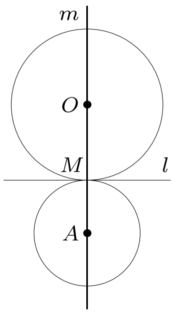


Рис. 19

Возьмем теперь на прямой m произвольную точку A, отличную от M. Тогда окружность с центром A и радиусом AM касается прямой l в точке M.

Мы доказали, что, во-первых, центр любой окружности, касающейся прямой l в точке M, лежит на прямой m, во-вторых, что каждая точка прямой m, отличная от M, является центром окружности, касающейся прямой l в точке M. Следовательно, прямая m без точки M есть искомое геометрическое место точек.

Пример 2. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и высекающую на данной прямой отрезок, равный данному.

Решение. Предположим, что искомая окружность построена (рис. 20). Пусть O — ее центр, R — данный радиус, M — данная точка, AB — хорда построенной окружности, лежащая на данной прямой l. Опустим перпендикуляр OC на прямую l. В прямоугольном треугольнике OBC известна гипотенуза (данный радиус R) и катет BC, равный половине данного отрезка. Кроме того, $OM = R$. Значит, искомый центр O принадлежит, во-первых, геометрическому месту точек, удаленных от данной

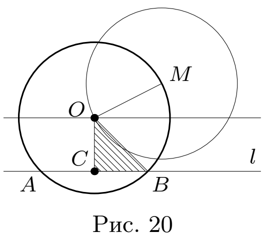


Рис. 20

прямой l на расстояние, равное OC (две параллельные прямые); во-вторых, геометрическому месту точек, удаленных от данной точки M на расстояние, равное данному радиусу R (окружность с центром M и радиусом R).

Отсюда вытекает следующее построение. Построив прямоугольный треугольник по гипотенузе R и катету, равному половине данного отрезка, найдем расстояние от искомого центра O до данной прямой (второй катет построенного треугольника). Теперь построим первое геометрическое место точек — две прямые, параллельные данной прямой l и удаленные от нее на расстояние, равное второму катету построенного треугольника. Далее строим окружность с центром M и радиусом R. Каждая из точек пересечения построенных геометрических мест есть центр искомой окружности.

Пример 3. Найдите геометрическое место внутренних точек данного угла, сумма расстояний от которых до сторон этого угла равна заданной величине.

Решение. На расстоянии, равном данной величине a, проведем прямую, параллельную стороне OB данного угла AOB (рис. 21), и пересекающую сторону OA в точке C. Пусть D — точка проведенной прямой, лежащая внутри угла AOB. Тогда сумма расстояний от любой внутренней точки угла AOB, лежащей на биссектрисе угла OCD, до сторон OA и OB равна a. Обратно, если сумма расстояний от некоторой внутренней точки N угла AOB до сторон этого угла равна a и P, Q — проекции этой точки на прямые OA и OB, то $NQ + NP = a$ и $NQ + NF = a$, где F — проекция точки N на прямую CD. Поэтому $NP = NF$. Следовательно, точка N лежит на биссектрисе угла OCD.

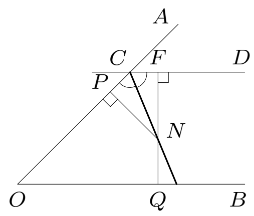


Рис. 21

Задачи первого уровня

1.282. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место точек M, для которых $\angle MAB = 70°$.

1.283. Найдите геометрическое место вершин равнобедренных треугольников с данным основанием.

1.284. Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.

1.285. Найдите геометрическое место центров окружностей, имеющих данный радиус и проходящих через данную точку.

1.286. На данной прямой постройте точку, равноудаленную от двух данных точек.

1.287. На данной окружности постройте точку, которая находилась бы на данном расстоянии от данной прямой.

1.288. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

1.289. Постройте окружность, которая проходила бы через две данные точки и центр которой находился бы на данной прямой.

1.290. Постройте окружность с центром в данной точке на стороне данного угла, которая на другой стороне угла отсекала бы хорду данной длины.

1.291. Найдите геометрическое место центров окружностей данного радиуса, касающихся данной прямой.

1.292. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной прямой.

1.293. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой в данной точке.

1.294. Постройте окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся данной прямой в данной точке B.

1.295. Найдите геометрическое место центров окружностей данного радиуса, высекающих на данной прямой отрезки, равные данному.

1.296. Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности.

1.297. Найдите геометрическое место середин всех хорд данной окружности.

1.298. Найдите геометрическое место середин хорд окружности, параллельных данной прямой.

1.299. Дана окружность. Найдите геометрическое место середин ее хорд, имеющих данную длину.

1.300. На листе прозрачной бумаги нарисован угол, вершина которого недоступна (находится вне чертежа). Как без всяких инструментов построить биссектрису этого угла?

1.301. На прозрачной бумаге нарисован треугольник. Без всяких инструментов постройте центр вписанной в него окружности.

1.302. На прозрачной бумаге нарисован треугольник. Без всяких инструментов постройте центр описанной около него окружности.

1.303. Найдите геометрическое место центров окружностей, вписанных в данный угол.

1.304. Постройте окружность, касающуюся двух данных прямых, причем одной из них — в данной точке.

1.305. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от трех прямых.

1.306. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся двух данных пересекающихся прямых.

1.307. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности в данной на ней точке.

1.308. Постройте окружность с данным центром, касающуюся данной окружности.

1.309. Найдите геометрическое место центров окружностей данного радиуса, касающихся данной окружности.

1.310. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности.

1.311. Постройте окружность данного радиуса, которая касалась бы данной прямой и данной окружности.

1.312. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных параллельных прямых.

1.313. Постройте окружность, которая касалась бы двух данных параллельных прямых и круга, находящегося между ними.

1.314. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей.

Задачи второго уровня

1.315. Постройте окружность, касающуюся двух данных концентрических окружностей (концентрическими окружностями называются окружности с общим центром).

1.316. Постройте окружность, которая проходила бы через данную точку и касалась бы данной окружности в данной точке.

1.317. Впишите в данный треугольник ABC равнобедренный треугольник MNK данной высоты так, чтобы его основание MN было параллельно AB, а вершина K лежала на стороне AB.

1.318. Даны точки A и B. Проводятся всевозможные окружности с центром в точке B и радиусом, не превосходящим AB, а через точку A — касательные к ним. Найдите геометрическое место точек касания.

1.319. Дана окружность с центром O и точка A внутри нее. Постройте окружность, проходящую через точки A и O и касающуюся данной окружности.

1.320. Постройте треугольник по радиусу описанной окружности, стороне и высоте, проведенной к другой стороне.

1.321. Дана линейка постоянной ширины (т. е. с параллельными краями) и без делений. Постройте биссектрису данного угла.

1.322. Точка A лежит на окружности. Найдите геометрическое место таких точек M, что отрезок AM делится этой окружностью пополам.

1.323. Дана линейка с делениями через 1 см. Постройте биссектрису данного угла.

1.324. Точка O лежит на отрезке AC. Найдите геометрическое место точек M, для которых $\angle MOC = 2\angle MAC$.

1.325. Постройте треугольник по стороне и проведенной к ней высоте, если известно, что эта сторона видна из центра вписанной в треугольник окружности под углом $135°$.

1.326. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден: а) под острым углом; б) под тупым углом.

1.327. Через данную точку проведите прямую, на которой данная окружность высекала бы хорду, равную данному отрезку.

1.328. Постройте прямую, на которой две данные окружности высекали бы хорды, равные двум данным отрезкам.

1.329. Постройте окружность, касающуюся двух данных окружностей, причем одной из них — в данной точке.

Задачи третьего уровня

1.330. Точка X движется по окружности с центром O. На каждом радиусе OX откладывается отрезок OM, длина которого равна расстоянию от точки X до заданного диаметра окружности. Найдите геометрическое место точек M.

1.331. На стороне треугольника постройте точку, сумма расстояний от которой до двух других сторон равна данному отрезку.

§ 1.7. Геометрические неравенства

1. *Против большей стороны треугольника лежит больший угол.*

Доказательство. Пусть сторона AB треугольника ABC больше стороны AC (рис. 22, a). Отложим на стороне AB отрезок AD, равный AC. Тогда точка D лежит между точками A и B. В равнобедренном треугольнике ADC углы при основании CD равны, а так как угол ADC — внешний угол треугольника DBC, то

$$\angle ACB > \angle ACD = \angle ADC = \angle ABC + \angle DCB > \angle ABC.$$

2. *Против большего угла треугольника лежит бо́льшая сторона.*

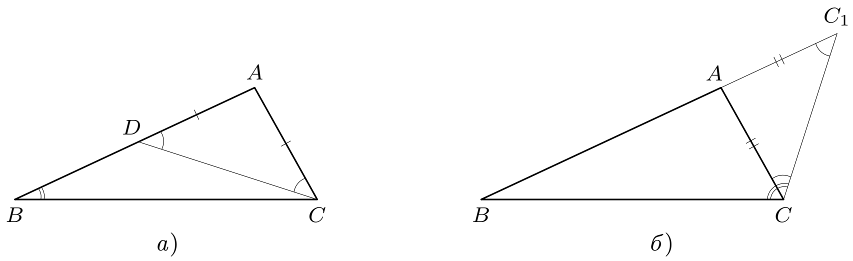


Рис. 22

3. Неравенство треугольника. *Сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны.*

Доказательство. На продолжении стороны AB треугольника ABC за вершину A отложим отрезок AC_1, равный AC (рис. 22, *б*). В равнобедренном треугольнике CAC_1 угол AC_1C равен углу ACC_1. Так как точка A лежит на отрезке BC_1, то $\angle BCC_1 = \angle BCA + ACC_1$, поэтому $\angle BC_1C = \angle ACC_1 < \angle BCC_1$. Таким образом, в треугольнике BCC_1 против большего угла лежит бо́льшая сторона, т. е. $BC_1 > BC$. Следовательно,

$$BA + AC = BA + AC_1 > BC.$$

4. *Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причем $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, а угол BAC больше угла $B_1A_1C_1$. Тогда BC больше B_1C_1.*

Доказательство. Рассмотрим такую точку D, чтобы треугольник ABD был равен треугольнику $A_1B_1C_1$, а точки D и C были бы расположены по одну сторону от прямой AB (рис. 23). Тогда, так как $\angle BAC > \angle B_1A_1C_1 = \angle BAD$, луч AD будет расположен между сторонами угла BAC.

Проведем биссектрису AM угла CAD. Она также будет расположена между сторонами угла BAC, поэтому точка E ее пересечения с прямой BC будет расположена между точками B и C.

Треугольники ADE и ACE равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $DE = CE$. Применяя неравенство треугольника к треугольнику BDE, получим, что

$$BC = BE + EC = BE + DE > BD = B_1C_1.$$

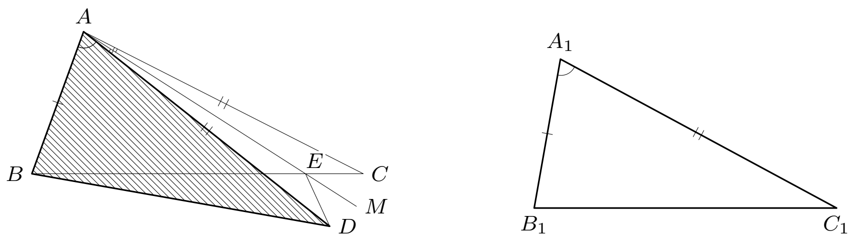


Рис. 23

5. *Даны треугольники* ABC *и* $A_1B_1C_1$, *причем* $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, *а* BC *больше* B_1C_1. *Тогда угол* BAC *больше угла* $B_1A_1C_1$.

Пример 1. Докажите, что каждая сторона четырехугольника меньше суммы трех других его сторон.

Решение. Пусть AC — диагональ четырехугольника $ABCD$ (рис. 24). Применив неравенство треугольника к треугольникам ACD и ABC, получим

$$AD < AC + CD < (AB + BC) + CD.$$

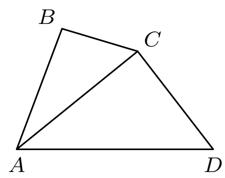


Рис. 24

Пример 2. Докажите, что высота неравнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, меньше половины гипотенузы.

Решение. Пусть CH — высота прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB (рис. 25). Проведем медиану CM. Тогда CH — катет прямоугольного треугольника CHM с гипотенузой CM, поэтому $CH < CM$, а так как медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то $CH < \frac{1}{2}AB$.

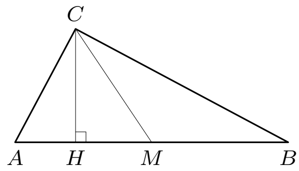


Рис. 25

Пример 3. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и AC соответственно в точках M и N. Докажите, что $BN > MN$.

Решение. В треугольнике BMN (рис. 26) угол BMN тупой как внешний угол равнобедренного треугольника AMN, поэтому BN — наибольшая сторона треугольника BMN.

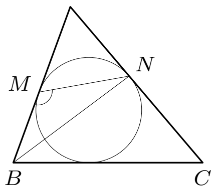


Рис. 26

Задачи первого уровня

1.332. Докажите, что катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы.

1.333. Стороны равнобедренного треугольника равны 1 и 3. Какая из сторон является основанием?

1.334. Может ли основание равнобедренного треугольника быть вдвое больше боковой стороны?

1.335. Может ли периметр треугольника быть равным 19, если одна из его сторон на 1 короче другой и на 3 длиннее третьей?

1.336. Может ли в треугольнике сторона быть вдвое больше другой стороны и вдвое меньше третьей?

1.337. Докажите, что высота треугольника ABC, проведенная из вершины A, не может быть больше стороны AB.

1.338. Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.

1.339. В треугольнике ABC с неравными сторонами AB и AC проведены из вершины A высота, медиана и биссектриса. Докажите, что из этих трех отрезков наименьшим является высота.

1.340. Сколько можно составить треугольников из отрезков, равных: а) 2, 3, 4 и 5; б) 2, 3, 4, 5, 6, 7?

1.341. В треугольнике две стороны равны 1 и 6. Найдите третью сторону, если известно, что ее длина равна целому числу.

1.342. В треугольнике ABC известно, что $AB < BC < AC$, а один из углов вдвое меньше другого и втрое меньше третьего. Найдите угол при вершине A.

1.343. В треугольнике ABC угол A равен среднему арифметическому двух других углов. Укажите среднюю по величине сторону треугольника.

1.344. Докажите, что диаметр есть наибольшая хорда окружности.

1.345$^{\mathbf{0}}$. Даны четыре точки A, B, C и D. Докажите, что $AD < AB + BC + CD$.

1.346. Существует ли четырехугольник со сторонами, равными: а) 1, 1, 1, 2; б) 1, 2, 3, 6?

1.347. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол на два неравных угла. Докажите, что катет, прилежащий к меньшему из них, меньше другого катета.

1.348. Основание D высоты AD треугольника ABC лежит на стороне BC, причем $\angle BAD > \angle CAD$. Что больше, AB или AC?

1.349. Докажите, что в треугольнике любая сторона меньше половины периметра.

1.350. Докажите, что в четырехугольнике любая диагональ меньше половины периметра.

1.351^{0}. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы его двух противоположных сторон.

1.352. Четыре дома расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. Где нужно вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до четырех домов была наименьшей?

1.353. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника меньше периметра, но больше полупериметра этого четырехугольника.

1.354. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину равнобедренного треугольника с точкой, лежащей на основании, не больше боковой стороны треугольника.

Задачи второго уровня

1.355. Биссектриса угла при основании BC равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AC в точке K. Докажите, что $BK < 2CK$.

1.356^{0}. Две окружности радиусов r и R $(r < R)$ пересекаются. Докажите, что расстояние между их центрами: а) меньше, чем $r + R$; б) больше, чем $R - r$.

1.357^{0}. Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 3 равно 8. Найдите наименьшее и наибольшее из расстояний между точками, одна из которых лежит на первой окружности, а другая — на второй.

1.358. Докажите, что каждая сторона треугольника видна из центра вписанной окружности под тупым углом.

1.359. Верно ли утверждение предыдущей задачи для четырехугольника, в который можно вписать окружность?

1.360. Рассмотрим равнобедренные треугольники с одними и теми же боковыми сторонами. Докажите, что чем больше угол при вершине, тем меньше высота, опущенная на основание.

1.361. Рассмотрим равнобедренные треугольники с одними и теми же боковыми сторонами. Докажите, что чем больше основание, тем меньше проведенная к нему высота.

1.362. Докажите что из двух неравных хорд окружности бóльшая удалена от центра на меньшее расстояние. Верно ли обратное?

1.363. Через данную точку внутри круга проведите наименьшую хорду.

1.364⁰. Докажите, что медиана треугольника ABC, проведенная из вершины A, меньше полусуммы сторон AB и AC, но больше их полуразности.

1.365. Внутри треугольника ABC взята точка M. Докажите, что угол BMC больше угла BAC.

1.366. Пусть CK — биссектриса треугольника ABC и $AC > BC$. Докажите, что угол AKC — тупой.

1.367. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AB > AD$ и $CB > CD$.

1.368. В треугольнике ABC сторона AC больше стороны BC. Медиана CD делит угол C на два угла. Какой из них больше?

1.369. Биссектриса треугольника делит его сторону на два отрезка. Докажите, что к большей из двух других сторон треугольника примыкает больший из них.

1.370. AD — биссектриса треугольника ABC, причем $BD > CD$. Докажите, что $AB > AC$.

1.371. В треугольнике ABC известно, что $\angle B > 90^\circ$. На отрезке BC взяты точки M и N (M между B и N) так, что лучи AN и AM делят угол BAC на три равные части. Докажите, что $BM < MN < NC$.

1.372. В треугольнике ABC угол B прямой или тупой. На стороне BC взяты точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Докажите, что $\angle BAM > \angle MAN > \angle NAC$.

1.373. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек, расстояние от каждой из которых до точки A больше, чем расстояние до точки B.

1.374. В треугольнике ABC с тупым углом C точки M и N расположены соответственно на сторонах AC и BC. Докажите, что отрезок MN короче отрезка AB.

1.375. Отрезок соединяет вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне. Докажите, что этот отрезок меньше большей из двух других сторон.

1.376. Докажите, что расстояние между любыми двумя точками, взятыми на сторонах треугольника, не больше наибольшей из его сторон.

1.377. В треугольнике ABC на наибольшей стороне BC, равной a, выбирается точка M. Найдите наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAM и ACM.

1.378. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M, отличная от C. Докажите, что

$$MA + MB > CA + CB.$$

1.379. Угол при вершине A треугольника ABC равен $60°$. Докажите, что $AB + AC < 2BC$.

1.380. Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC. Докажите, что угол A острый тогда и только тогда, когда $AA_1 > \frac{1}{2}BC$.

1.381. Точки D и E — середины сторон соответственно AB и BC треугольника ABC. Точка M лежит на стороне AC, причем $ME > EC$. Докажите, что $MD < AD$.

1.382. Два противоположных угла выпуклого четырехугольника тупые. Докажите, что диагональ, соединяющая вершины этих углов, меньше другой диагонали.

1.383. Диагональ AC делит вторую диагональ выпуклого четырехугольника $ABCD$ на две равные части. Докажите, что если $AB > AD$, то $BC < DC$.

1.384$^{\mathbf{0}}$. Точки M и N расположены по одну сторону от прямой l. Постройте на прямой l такую точку K, чтобы сумма $MK + NK$ была наименьшей.

1.385. Точка M лежит внутри острого угла. Постройте на сторонах этого угла точки A и B, для которых периметр треугольника AMB был бы наименьшим.

Задачи третьего уровня

1.386. Внутри острого угла даны точки M и N. Постройте на сторонах угла точки K и L так, чтобы периметр четырехугольника $MKLN$ был наименьшим.

1.387. Точка C лежит внутри прямого угла AOB. Докажите, что периметр треугольника ABC больше $2OC$.

1.388. Пусть вписанная окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках B_1 и A_1. Докажите, что если $AC > BC$, то $AA_1 > BB_1$.

1.389. Точка M расположена внутри треугольника ABC. Докажите, что $BM + CM < AB + AC$.

1.390. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до трех его вершин больше полупериметра, но меньше периметра треугольника.

1.391. Высота треугольника в два раза меньше его основания, а один из углов при основании равен $75°$. Докажите, что треугольник равнобедренный.

1.392. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен $20°$. Докажите, что боковая сторона больше удвоенного основания, но меньше утроенного.

1.393. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого равны?

1.394. В некотором царстве, в некотором государстве есть несколько городов, причем расстояния между ними все попарно различны. В одно прекрасное утро из каждого города вылетает по одному самолету, который приземляется в ближайшем городе. Может ли в одном городе приземлиться более пяти самолетов?

Раздел второй
8 класс

§ 2.1. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Свойства параллелограмма.

1. *Сумма любых двух соседних углов параллелограмма равна* 180°, *а противоположные углы равны.*

2. *Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.*

3. *Противолежащие стороны параллелограмма равны.*

4. *Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.*

Признаки параллелограмма.

1. *Если в четырехугольнике противолежащие стороны попарно равны, то это параллелограмм.*

2. *Если в четырехугольнике противолежащие углы попарно равны, то это параллелограмм.*

3. *Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то это параллелограмм.*

4. *Если диагонали четырехугольника делятся точкой их пересечения пополам, то это параллелограмм.*

Точку пересечения диагоналей параллелограмма называют его *центром.*

Параллелограмм, в котором все углы прямые, называется *прямоугольником.* Можно убедиться, что если в параллелограмме есть один прямой угол, то и все остальные углы будут прямыми.

Диагонали прямоугольника равны. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Параллелограмм, в котором все стороны равны, называется *ромбом*.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов. Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб. Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется *квадратом*. У квадрата все стороны равны, а все углы прямые.

Пример 1. Точки K, L, M и N — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках пересечения прямых AL, BM, CN и DK — параллелограмм.

Решение. Из определения параллелограмма следует, что $BC \parallel AD$, поэтому $LC \parallel AN$ (рис. 27). Кроме того, $LC = \frac{1}{2}BC = AN$. Значит, противоположные стороны LC и AN четырехугольника $ANCL$ равны и параллельны, следовательно, это параллелограмм. Поэтому $AL \parallel CN$. Аналогично, $BM \parallel DK$. Мы доказали, что противолежащие стороны четырехугольника с вершинами в точках пересечения прямых AL, BM, CN и DK попарно параллельны. Следовательно, это параллелограмм.

Пример 2. Докажите, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Решение. Через вершины треугольника ABC проведем

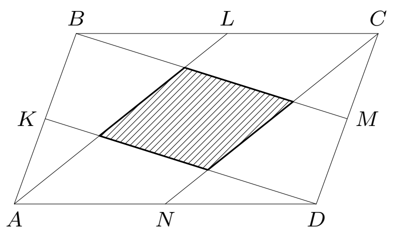


Рис. 27

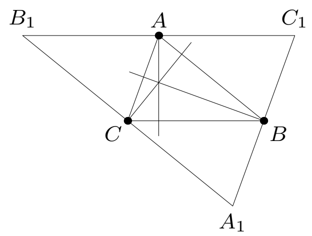


Рис. 28

прямые, параллельные его противолежащим сторонам (рис. 28). Пусть эти прямые пересекаются в точках A_1, B_1 и C_1 (A_1 — точка пересечения прямых, проведенных через B и C и т. д.). Тогда четырехугольники ABA_1C и $ACBC_1$ — параллелограммы, поэтому $A_1B = AC = C_1B$, значит, B — середина стороны A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично докажем, что точки A и C середины сторон B_1C_1 и A_1B_1 соответственно. Следовательно, прямые, содержащие высоты треугольника ABC, являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, а так как серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке, утверждение доказано.

Пример 3. Докажите, что в любом треугольнике ABC середина стороны BC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот с точкой окружности, описанной около этого треугольника, диаметрально противоположной вершине A, и делит этот отрезок пополам.

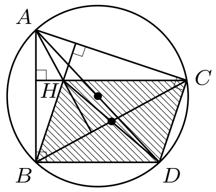


Рис. 29

Решение. Пусть H — точка пересечения высот, AD — диаметр описанной окружности треугольника ABC (рис. 29). Тогда $\angle ACD = 90°$, а так как $BH \perp AC$, то $DC \parallel BH$. Аналогично, $BD \parallel CH$. Значит, четырехугольник $BHCD$ — параллелограмм. Следовательно, его диагонали BC и HD делятся точкой пересечения пополам.

Задачи первого уровня

2.1. Сторона параллелограмма втрое больше другой его стороны. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 24.

2.2. Один из углов параллелограмма на $50°$ меньше другого. Найдите углы параллелограмма.

2.3. Точки M и N — середины противолежащих сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $AMCN$ — параллелограмм.

2.4. Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной a, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.

2.5. Биссектриса угла параллелограмма делит сторону параллелограмма на отрезки, равные a и b. Найдите стороны параллелограмма.

2.6. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, равна 2 и делит сторону параллелограмма пополам. Острый угол параллелограмма равен 30°. Найдите диагональ, проведенную из вершины тупого угла, и углы, которые она образует со сторонами.

2.7. Постройте параллелограмм

а) по двум соседним сторонам и углу между ними;

б) по диагоналям и углу между ними;

в) по двум сторонам и диагонали, исходящим из одной вершины.

2.8. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Периметр параллелограмма равен 12, а разность периметров треугольников BOC и COD равна 2. Найдите стороны параллелограмма.

2.9. Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общую медиану AM. Докажите, что $BC_1 = B_1C$.

2.10$^{\mathbf{0}}$. В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M до точки D на расстояние, равное AM ($AM = MD$). Докажите, что $ABDC$ — параллелограмм.

2.11. Постройте ромб по данным диагоналям.

2.12. Постройте прямоугольник по диагонали и одной из его сторон.

2.13. Докажите, что концы двух различных диаметров окружности являются вершинами прямоугольника.

2.14. Докажите, что около любого прямоугольника можно описать окружность. Где расположен ее центр?

2.15. Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность. Где расположен ее центр?

2.16. В данную окружность впишите прямоугольник с данным углом между диагоналями.

2.17. Диагонали прямоугольника равны 8 и пересекаются под углом в 60°. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

2.18. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Биссектрисы углов A и B пересекают прямую CD в точках M и N, причем $MN = 12$. Найдите стороны параллелограмма.

2.19. Угол при вершине A ромба $ABCD$ равен 20°. Точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных из вершины B на стороны AD и CD. Найдите углы треугольника BMN.

2.20. Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Отрезок O_1O_2 пересекает эти окружности в точках M и N. Докажите, что четырехугольники O_1AO_2B и $AMBN$ — ромбы.

2.21. Докажите, что точки попарного пересечения биссектрис всех четырех углов параллелограмма являются вершинами прямоугольника.

2.22. Квадрат вписан в равнобедренный прямоугольный треугольник, причем одна вершина квадрата расположена на гипотенузе, противоположная ей вершина совпадает с вершиной прямого угла треугольника, а остальные лежат на катетах. Найдите сторону квадрата, если катет треугольника равен a.

2.23. Две вершины квадрата расположены на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, а две другие — на катетах. Найдите сторону квадрата, если гипотенуза равна a.

2.24. На каждой стороне квадрата взяли по одной точке. При этом оказалось, что эти точки являются вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны диагоналям квадрата. Найдите периметр прямоугольника, если диагональ квадрата равна 6.

2.25. Постройте параллелограмм по двум сторонам и диагонали, исходящим из одной вершины.

2.26. В данный треугольник ABC впишите ромб, имеющий с треугольником общий угол A.

2.27. Около данной окружности опишите ромб с данным углом.

2.28. Вершины M и N равностороннего треугольника BMN лежат соответственно на сторонах AD и CD квадрата $ABCD$. Докажите, что $MN \parallel AC$.

Задачи второго уровня

2.29. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, проходит через его центр.

2.30. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

2.31. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм, причем его центр совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.

2.32. Через центр параллелограмма $ABCD$ проведены две прямые. Одна из них пересекает стороны AB и CD соответственно в точках M и K, вторая — стороны BC и AD соответственно в точках N и L. Докажите, что четырехугольник $MNKL$ — параллелограмм.

2.33. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что при пересечении прямых AN, BK, CL и DM получится параллелограмм, причем его центр совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.

2.34. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины D параллелограмма $ABCD$ на диагональ AC. Докажите, что перпендикуляры к прямым AB и BC, проведенные через точки A и C соответственно, пересекутся на прямой DM.

2.35. Через данную точку внутри угла проведите прямую, отрезок которой, заключенный внутри этого угла, делился бы данной точкой пополам.

2.36. Постройте выпуклый четырехугольник по данным серединам трех его равных сторон.

2.37. Докажите, что в параллелограмме против большего угла лежит бóльшая диагональ.

2.38. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый угол ромба равен 30°, а сторона равна 4.

2.39. Около данной окружности опишите ромб с данной стороной.

2.40. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AKCM$ является ромбом. Диагональ AC составляет со стороной AB угол 30°. Найдите сторону ромба, если наибольшая сторона прямоугольника $ABCD$ равна 3.

2.41. Через середину диагонали KM прямоугольника $KLMN$ перпендикулярно этой диагонали проведена прямая, пересекающая стороны KL и MN в точках A и B соответственно. Известно, что $AB = BM = 6$. Найдите бо́льшую сторону прямоугольника.

2.42. Прямая, проходящая через центр прямоугольника перпендикулярно диагонали, пересекает бо́льшую сторону прямоугольника под углом, равным 60°. Отрезок этой прямой, заключенный внутри прямоугольника, равен 10. Найдите бо́льшую сторону прямоугольника.

2.43. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через вершину B и середину стороны BC. Найдите углы параллелограмма.

2.44. Постройте квадрат по его центру и двум точкам, лежащим на противоположных сторонах.

2.45. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами квадрата являются вершинами еще одного квадрата.

2.46. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что $KLMN$ — также квадрат.

2.47. Через произвольную точку внутри квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, каждая из которых пересекает две противоположные стороны квадрата. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри квадрата, равны.

2.48. Прямая имеет с параллелограммом $ABCD$ единственную общую точку B. Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния a и b соответственно. На какое расстояние удалена от этой прямой вершина D?

2.49. Стороны параллелограмма равны a и b. Найдите диагонали четырехугольника, образованного пересечениями биссектрис: а) внутренних углов параллелограмма; б) внешних углов параллелограмма.

2.50. Докажите, что биссектрисы всех четырех углов прямоугольника (не являющегося квадратом) при пересечении образуют квадрат.

2.51. Через точку, расположенную внутри треугольника, проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые разбивают треугольник на три треугольника и три четырехугольника. Пусть a, b и c — параллельные высоты трех этих треугольников. Найдите параллельную им высоту исходного треугольника.

2.52. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон постоянна.

2.53. Через каждую вершину параллелограмма проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не проходящей через эту вершину. Докажите, что диагонали четырехугольника, образованного пересечениями четырех проведенных таким образом прямых, перпендикулярны сторонам параллелограмма.

2.54$^{\mathbf{0}}$. Окружность, построенная на стороне BC треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Отрезки CM и BN пересекаются в точке P. Докажите, что AP перпендикулярно BC.

2.55. С помощью одной линейки опустите перпендикуляр из данной точки на данный диаметр данной окружности (точка не лежит ни на окружности, ни на диаметре).

2.56. Три равных окружности проходят через одну точку и попарно пересекаются в трех других точках A, B и C. Докажите, что треугольник ABC равен треугольнику с вершинами в центрах окружностей.

2.57. Угол при вершине A ромба $ABCD$ равен 60°. На сторонах AB и BC взяты соответственно точки M и N, причем $AM = BN$. Докажите, что треугольник DMN равносторонний.

2.58. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что их центры являются вершинами квадрата.

2.59. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны BC, точка N — середина стороны CD, P — точка пересечения отрезков DM и BN. Докажите, что угол MAN равен углу BPM.

Задачи третьего уровня

2.60. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны CD, P — проекция вершины C на прямую AB, M — середина стороны AD. Докажите, что $\angle DMP = 3\angle APM$.

2.61. На сторонах AB и AC треугольника ABC постройте соответственно точки M и N так, что $BM = AN$ и MN параллельно BC.

2.62. На каждой стороне квадрата отметили по точке. Затем все, кроме этих точек, стерли. Восстановите квадрат с помощью циркуля и линейки.

2.63. Дана линейка с делениями в 1 см. Проведите какой-нибудь перпендикуляр к данной прямой.

§ 2.2. Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

Теорема о средней линии треугольника. *Прямая, содержащая среднюю линию треугольника, параллельна третьей стороне треугольника. Средняя линия треугольника равна половине этой стороны.*

Теорема о медианах треугольника. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении* $2:1$*, считая от вершины треугольника.*

Доказательство. Докажем сначала, что любые две медианы делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Пусть медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 30). Отметим середины P и Q отрезков BO и CO. Отрезок PQ — средняя линия треугольника OBC, а отрезок MN — средняя линия треугольника ABC, поэтому $PQ \parallel BC \parallel MN$ и $PQ = \frac{1}{2}BC = MN$. Противоположные стороны PQ и MN четырехугольника $MNPQ$ равны и параллельны, значит, $MNPQ$ — параллелограмм. Его диагонали MP и QN делятся точкой O их пересечения пополам, поэтому $MO = OP = BP$ и $NO = OQ = CQ$. Следовательно, $BO : OM = CO : ON = 2 : 1$.

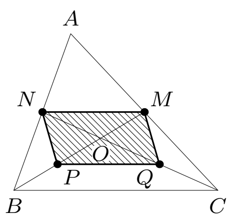


Рис. 30

Поскольку каждые две медианы делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершины треугольника, медиана, проведенная из вершины A, должна разделит каждую из медиан BM и CN в таком отношении, а значит, должна пройти через точку O. Что и требовалось доказать.

Пример 1. Докажите, что отрезок, соединяющий середины сторон AB и AC треугольника ABC, и медиана, проведенная из вершины A, делят друг друга пополам.

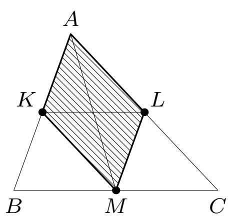


Рис. 31

Решение. Пусть AM — медиана треугольника ABC, точки K и L — середины сторон AB и AC соответственно (рис. 31). По теореме о средней линии треугольника $LM \parallel AB$ и $KM \parallel AC$, поэтому противолежащие стороны четырехугольника $AKML$ попарно параллельны. Значит, $AKML$ — параллелограмм. Его диагонали AM и KL делятся точкой пересечения пополам.

Пример 2. BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC. На продолжении медианы CC_1 за точку C отложен отрезок C_1C_2, равный $\frac{1}{3}CC_1$. Оказалось, что $C_2B_1 = AB_1$. Докажите, что медианы CC_1 и BB_1 взаимно перпендикулярны.

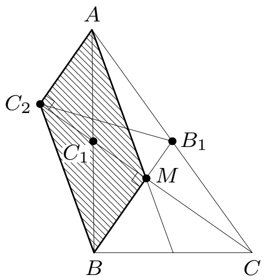


Рис. 32

Решение. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 32). По теореме о медианах треугольника $MC_1 = \frac{1}{3}CC_1 = C_1C_2$. Поэтому диагонали AB и C_2M четырехугольника $AMBC_2$ делятся точкой пересечения пополам.

Значит, $AMBC_2$ — параллелограмм, поэтому $AC_2 \parallel BM$. С другой стороны, медиана C_2B_1 треугольника AC_2C равна половине стороны AC, значит, треугольник AC_2C прямоугольный, $\angle AC_2C = 90°$, а так как $AC_2 \parallel BM$, то $\angle BMC_1 = 90°$.

Пример 3. Точки K, L, M и N — середины сторон соответственно AB, BC, CD и DE пятиугольника $ABCDE$, а точки P и Q — середины отрезков соответственно KM и LN. Докажите, что $PQ \parallel AE$ и $PQ = \frac{1}{4}AE$.

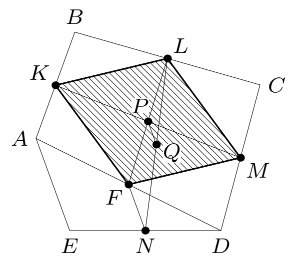


Рис. 33

Решение. Пусть F — середина диагонали AD (рис. 33). Тогда четырехугольник $KLMF$ — параллелограмм. Его диагональ LF проходит через середину P второй диагонали KM и делится ею пополам, поэтому PQ — средняя линия треугольника LFN. С другой стороны, FN — средняя линия треугольника ADE, следовательно,

$$PQ \parallel FN \parallel AE \quad \text{и} \quad PQ = \frac{1}{2}FN = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}AE\Big) = \frac{1}{4}AE.$$

Задачи первого уровня

2.64. Докажите, что три средние линии разбивают треугольник на четыре равных треугольника.

2.65. Дан треугольник с периметром, равным 24. Найдите периметр треугольника с вершинами в серединах сторон данного.

2.66. Стороны треугольника равны a и b. Через середину третьей стороны проведены прямые, параллельные двум другим сторонам. Найдите периметр полученного четырехугольника.

2.67. Постройте треугольник по серединам трех его сторон.

2.68⁰. Докажите, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

2.69. Дан четырехугольник, сумма диагоналей которого равна 18. Найдите периметр четырехугольника с вершинами в серединах сторон данного.

2.70. Найдите периметр четырехугольника с вершинами в серединах сторон прямоугольника с диагональю, равной 8.

2.71. Найдите стороны и углы четырехугольника с вершинами в серединах сторон ромба, диагонали которого равны 6 и 10.

2.72. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна отрезку, соединяющему середины катетов.

2.73. Острый угол A ромба $ABCD$ равен 45°, проекция стороны AB на сторону AD равна 12. Найдите расстояние от центра ромба до стороны CD.

2.74. Расстояние между серединами взаимно перпендикулярных хорд AC и BC некоторой окружности равно 10. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения хорд.

2.75. Расстояние от середины хорды BC до диаметра AB равно 1. Найдите хорду AC, если $\angle BAC = 30^\circ$.

2.76. Середины сторон выпуклого пятиугольника последовательно соединены отрезками. Найдите периметр полученного пятиугольника, если сумма всех диагоналей данного равна a.

2.77. Две окружности пересекаются в точках A и D. Проведены диаметры AB и AC этих окружностей. Найдите $BD+DC$, если расстояние между центрами окружностей равно a и центры окружностей лежат по разные стороны от общей хорды.

2.78. Точки M и N расположены соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, причем $BM = 3AM$ и $CN = 3AN$. Докажите, что $MN \parallel BC$ и найдите MN, если $BC = 12$.

Задачи второго уровня

2.79. Две прямые, проходящие через точку C, касаются окружности в точках A и B. Может ли прямая, проходящая через середины отрезков AC и BC, касаться этой окружности?

2.80. Сторона треугольника равна a. Найдите отрезок, соединяющий середины медиан, проведенных к двум другим сторонам.

2.81. Найдите геометрическое место середин всех отрезков, один конец которых лежит на данной прямой, а второй совпадает с данной точкой, не лежащей на этой прямой.

2.82. Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырехугольника без параллельных сторон и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.

2.83. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, равны. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны.

2.84. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, перпендикулярны. Докажите, что диагонали четырехугольника равны.

2.85. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD, равен 1. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей AC и BD.

2.86. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AD и BC. Найдите угол, образованный продолжениями сторон AB и CD.

2.87. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешних углов B и C. Найдите отрезок PM, если периметр треугольника ABC равен 10.

2.88. Окружность проходит через середины гипотенузы AB и катета BC прямоугольного треугольника ABC и касается катета AC. В каком отношении точка касания делит катет AC?

2.89. Две медианы треугольника равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

2.90. Постройте параллелограмм по вершине и серединам сторон, не содержащих эту вершину.

2.91. Докажите, что сумма трех медиан треугольника меньше периметра, но больше трех четвертей периметра треугольника.

2.92. Точки M и N — середины соседних сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые DM и BN пересекаются на диагонали AC.

2.93. Точки M и N — середины соседних сторон BC и CD

параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

2.94. Высоты остроугольного треугольника ABC, проведенные из вершин B и C, равны 7 и 9, а медиана AM равна 8. Точки P и Q симметричны точке M относительно сторон AC и AB соответственно. Найдите периметр четырехугольника $APMQ$.

2.95. Постройте треугольник по высотам, проведенным из двух вершин, и медиане, проведенной из третьей.

2.96. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что середина отрезка MN лежит на средней линии треугольника ABC, параллельной его основанию.

2.97. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на три равные части.

2.98. Постройте треугольник по стороне и медианам, проведенным к двум другим сторонам.

2.99. Постройте треугольник по трем медианам.

2.100. Докажите признак равенства треугольников по трем медианам.

2.101. Точки A_1, B_1 и C_1 симметричны произвольной точке O относительно середин сторон соответственно BC, AC и AB треугольника ABC. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику ABC.

2.102. Точки A_1, B_1 и C_1 — образы произвольной точки O при симметрии относительно середин сторон соответственно BC, AC и AB треугольника ABC. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

2.103. В четырехугольнике $ABCD$ точка E — середина AB, F — середина CD. Докажите, что середины отрезков AF, CE, BF и DE являются вершинами параллелограмма.

2.104. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ втрое больше диагонали BD и пересекается с ней под углом в 60°. Найдите отрезок, соединяющий вершину D с серединой стороны BC, если $AC = 24$, а угол BDC — тупой.

2.105. Сторона AB треугольника ABC больше стороны AC, а $\angle A = 40^\circ$. Точка D лежит на стороне AB, причем $BD = AC$.

Точки M и N — середины отрезков BC и AD соответственно. Найдите угол BNM.

2.106. В выпуклом четырехугольнике прямая, проходящая через середины двух противоположных сторон, образует равные углы с диагоналями четырехугольника. Докажите, что диагонали равны.

2.107. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром O. Найдите расстояние от точки O до стороны AB, если известно, что $CD = a$.

2.108$^{\mathbf{0}}$. Докажите, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанного круга до противоположной стороны.

2.109. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что расстояние между серединами отрезков BC и AH равно радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

Задачи третьего уровня

2.110. Постройте треугольник, зная три точки, симметричные центру его описанной окружности относительно сторон.

2.111. Постройте пятиугольник по серединам его сторон.

2.112. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB соответственно. Докажите, что эти прямые и прямая AC имеют общую точку.

2.113. Два равносторонних треугольника ABC и CDE расположены по одну сторону от прямой AE и имеют единственную общую точку C. Пусть M, N и K — середины отрезков BD, AC и CE соответственно. Докажите, что треугольник MNK равносторонний.

2.114. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что $\angle PAC = \angle PBC$. Из точки P на стороны BC и CA опущены перпендикуляры PM и PK соответственно. Пусть D — середина стороны AB. Докажите, что $DK = DM$.

§ 2.3. Трапеция. Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках

Трапецией называется четырехугольник, у которого две противоположные стороны (основания) параллельны, а две другие (боковые стороны) нет.

Теорема о средней линии трапеции. *Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.*

Трапеция называется *равнобокой*[1], если ее боковые стороны равны.

Теорема о пропорциональных отрезках. *Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от его сторон пропорциональные отрезки.*

Теорема Фалеса. *Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной из его сторон равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.*

Пример 1. Диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что средняя линия трапеции равна высоте.

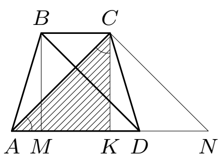


Рис. 34

Решение. Пусть CK — высота равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD и взаимно перпендикулярными диагоналями AC и BD (рис. 34). Предположим, что $AD > BC$. Если BM — еще одна высота трапеции, то

$$MK = BC,$$
$$DK = AM = \frac{1}{2}(AD - MK) = (AD - BC),$$
$$AK = AD - DK = AD - \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(AD + BC),$$

т. е. отрезок AK равен средней линии трапеции $ABCD$.

[1] Иногда вместо «равнобокая трапеция» говорят «равнобедренная трапеция» или «равнобочная трапеция».

Докажем теперь, что $\angle CAK = 45^\circ$. Отсюда будет следовать, что катеты прямоугольного треугольника AKC равны между собой, т. е. $CK = AK$. Через вершину C проведем прямую параллельно диагонали BD. Пусть N — точка пересечения этой прямой с продолжением основания AD. Тогда $CN = BD = AC$ и $\angle ACN = 90^\circ$. Поэтому ACN — равнобедренный прямоугольный треугольник. Значит, $\angle CAK = \angle CAN = \angle ANC = 45^\circ$. Следовательно, $CK = AK = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Пример 2. Биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются на втором ее основании. Докажите, что второе основание равно сумме боковых сторон.

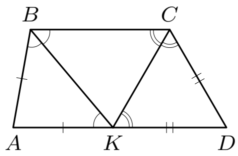


Рис. 35

Решение. Пусть биссектрисы углов при вершинах B и C трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке K, лежащей на основании AD (рис. 35). Тогда $\angle AKB = \angle CBK = \angle ABK$, поэтому треугольник ABK равнобедренный, $AK = AB$. Аналогично, $DK = CD$. Следовательно, $AD = AK + DK = AB + CD$.

Пример 3. Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

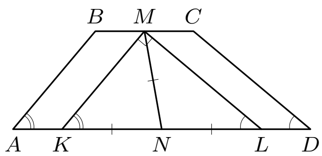


Рис. 36

Решение. Пусть M и N — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ ($AD = a$, $BC = b$, $a > b$) и $\angle A + \angle D = 90^\circ$ (рис. 36). Через точку M проведем прямые, параллельные AB и CD. Пусть K и L — точки их пересечения с основанием AD. Тогда $\angle MKL + \angle MLK = \angle A + \angle D = 90^\circ$. Поэтому $\angle KML = 90^\circ$ и $MN = \frac{1}{2}KL$ как медиана прямоугольного треугольника KML. Тогда

$$KL = AD - AK - LD = a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b = a - b.$$

Следовательно, $MN = \frac{1}{2}KL = \frac{1}{2}(a - b)$.

Задачи первого уровня

2.115$^{\mathbf{0}}$. Докажите следующие утверждения:

а) углы при основании равнобокой трапеции равны;

б) если углы при одном из оснований трапеции равны, то она равнобокая;

в) диагонали равнобокой трапеции равны;

г) если диагонали трапеции равны, то она равнобокая.

2.116. Докажите, что сумма противоположных углов равнобокой трапеции равна 180°. Верно ли обратное: если сумма противоположных углов трапеции равна 180°, то она равнобокая?

2.117. Наибольший угол прямоугольной трапеции равен 120°, а бóльшая боковая сторона равна c. Найдите разность оснований.

2.118$^{\mathbf{0}}$. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из конца C меньшего основания BC равнобокой трапеции $ABCD$ на ее большее основание AD. Найдите DP и AP, если основания трапеции равны a и b $(a > b)$.

2.119. Найдите углы и стороны четырехугольника с вершинами в серединах сторон равнобокой трапеции, диагонали которой равны 10 и пересекаются под углом, равным 40°.

2.120. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 5. Найдите отрезок, соединяющий середины оснований.

2.121. Высота равнобокой трапеции, проведенная из конца меньшего основания, делит ее большее основание на отрезки, равные 4 и 8. Найдите основания трапеции.

2.122. Найдите меньшее основание равнобокой трапеции, если высота, проведенная из конца меньшего основания, делит большее основание на отрезки, один из которых на 5 больше другого.

2.123. Боковая сторона равнобокой трапеции видна из точки пересечения диагоналей под углом, равным 60°. Найдите диагонали трапеции, если ее высота равна h.

2.124. В равнобокой трапеции острый угол равен 60°. Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.

2.125. Диагональ равнобокой трапеции равна 10 и образует угол, равный 60°, с основанием трапеции. Найдите среднюю линию трапеции.

2.126. AB и BC — соответственно боковая сторона и меньшее основание трапеции $ABCD$. Известно, что $AB = 2{,}6$ и $BC = 2{,}5$. Какой из отрезков пересекает биссектриса угла A: основание BC или боковую сторону CD?

2.127. Расстояния от концов диаметра окружности до некоторой касательной равны a и b. Найдите радиус окружности.

2.128. Окружность касается всех сторон равнобокой трапеции. Докажите, что боковая сторона трапеции равна средней линии.

2.129. Окружность касается всех сторон трапеции. Докажите, что боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

2.130. Боковые стороны трапеции равны 7 и 11, а основания — 5 и 15. Прямая, проведенная через вершину меньшего основания параллельно большей боковой стороне, отсекает от трапеции треугольник. Найдите его стороны.

Задачи второго уровня

2.131. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.

2.132. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

2.133. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3, а бо́льшая образует угол, равный 30°, с одним из оснований. Найдите это основание, если на нем лежит точка пересечения биссектрис углов при другом основании.

2.134. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Могут ли прямые BN и DM быть параллельными?

2.135. Докажите, что биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на ее средней линии.

2.136. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD. Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P, а при вершинах C и D — в точке Q. Докажите, что отрезок PQ равен полупериметру трапеции.

2.137. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Биссектрисы углов при вершинах A и B пересекаются в точке M, а биссектрисы углов при вершинах C и D — в точке N. Найдите MN, если известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $AD = d$.

2.138$^{\mathbf{0}}$. Основания трапеции равны a и b $(a > b)$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

2.139. Точка A лежит на одной из двух параллельных прямых, а точка B — на другой. Найдите геометрическое место середин отрезков AB.

2.140. Один из углов прямоугольной трапеции равен 120°, большее основание равно 12. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей, если известно, что меньшая диагональ трапеции равна ее большему основанию.

2.141. Найдите отношение оснований трапеции, если ее средняя линия делится диагоналями на три равные части.

2.142. Боковая сторона трапеции равна одному основанию и вдвое меньше другого. Докажите, что вторая боковая сторона перпендикулярна одной из диагоналей трапеции.

2.143. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 6, а вторая образует с основанием угол, равный 30°. Найдите среднюю линию трапеции.

2.144. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60°. Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.

2.145$^{\mathbf{0}}$. Точка M — середина отрезка AB. Точки A_1, M_1 и B_1 — проекции точек A, M и B на некоторую прямую. Докажите, что M_1 — середина отрезка A_1B_1.

2.146. На прямую, проходящую через вершину A треугольника ABC, опущены перпендикуляры BD и CE. Докажите, что середина стороны BC равноудалена от точек D и E.

2.147. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке K. Одна прямая касается этих окружностей в различных точках A и B, а вторая — соответственно в точках C и D. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку C, пересекается с этими прямыми в точках M и N. Найдите MN, если $AC = a$, $BD = b$.

2.148. Одна из боковых сторон трапеции равна сумме оснований. Докажите, что биссектрисы углов при этой стороне пересекаются на другой боковой стороне.

2.149. Дана трапеция, в которую можно вписать окружность. Докажите, что окружности, построенные на боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга.

2.150. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других сторон. Докажите, что этот четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

2.151. Окружность, построенная на большем основании трапеции как на диаметре, проходит через середины боковых сторон и касается меньшего основания. Найдите углы трапеции.

2.152. Окружность, построенная на меньшем основании трапеции как на диаметре, проходит через середины диагоналей и касается большего основания. Найдите углы трапеции.

Задачи третьего уровня

2.153. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ противоположные углы A и C прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF. Докажите, что $CE = FA$.

2.154. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG. Докажите, что $EF = DG$.

2.155. Одним прямолинейным разрезом отрежьте от треугольника трапецию, у которой меньшее основание было бы равно сумме боковых сторон.

2.156. Существуют ли две трапеции, основания первой из которых соответственно равны боковым сторонам второй, а основания второй — боковым сторонам первой?

2.157. На отрезке AB взята точка C. Прямая, проходящая через точку C, пересекает окружности с диаметрами AC и BC в точках K и L, а также окружность с диаметром AB — в точках M и N. Докажите, что $KM = LN$.

§ 2.4. Теорема Пифагора

Теорема. *Косинус острого угла зависит только от градусной меры угла и не зависит от расположения и размеров прямоугольного треугольника.*

Средним геометрическим (*средним пропорциональным*) двух неотрицательных чисел называется квадратный корень из произведения этих чисел.

Теорема. *Каждый катет прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.*

Теорема Пифагора. *Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.*

Теорема. *Синус и тангенс острого угла зависят только от градусной меры угла и не зависят от расположения и размеров прямоугольного треугольника.*

Теорема. *Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу.*

Пример 1. Стороны треугольника равны 10, 17, и 21. Найдите высоту, проведенную к большей стороне.

Решение. Пусть AD — высота треугольника ABC, в котором $BC = 21$, $AB = 10$ и $AC = 17$ (рис. 37). Обозначим $BD = x$. Поскольку BC — наибольшая сторона треугольника, точка D лежит на отрезке BC, поэтому $CD = 21 - x$. Выразив AD^2 по теореме Пифагора из прямоугольных треугольников ABD и ACD, получим уравнение $100 - x^2 = 289 - (21 - x)^2$, откуда находим, что $BD = x = 6$. Следовательно, $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 64$ и $AD = 8$.

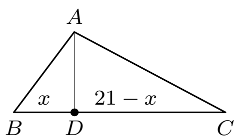


Рис. 37

Пример 2. В прямоугольный треугольник с гипотенузой a и острым углом $30°$ вписан прямоугольник, одна из сторон которого вдвое больше другой. Бо́льшая сторона прямоугольника находится на гипотенузе, а противоположные ей вершины — на катетах. Найдите стороны прямоугольника.

Решение. Пусть вершины K и N прямоугольника $KLMN$ (рис. 38) расположены соответственно на катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC, вершины L и M — на гипотенузе AB, $AB = a$, $\angle B = 30^\circ$. Обозначим MN через x. Тогда

$$LM = 2x, \qquad MB = MN \operatorname{ctg} 30^\circ = x\sqrt{3},$$

$$AL = KL \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

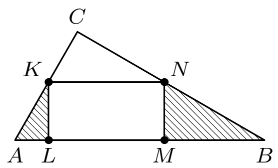


Рис. 38

Поскольку $AL + LM + MB = AB$, получим уравнение $\frac{x\sqrt{3}}{3} + 2x + x\sqrt{3} = a$. Откуда находим, что

$$MN = x = a\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right), \qquad LM = 2MN = a(2\sqrt{3} - 3).$$

Пример 3. Докажите, что в прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу пропорциональны квадратам катетов.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Пусть проекции катетов на гипотенузу равны a_1 и b_1 соответственно. Тогда $a_1c = a^2$ и $b_1c = b^2$, откуда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a^2}{b^2}$.

Пример 4. Дан треугольник со сторонами a, b и c. Докажите, что если медианы, проведенные к сторонам a и b, взаимно перпендикулярны, то $a^2 + b^2 = 5c^2$.

Решение. Пусть медианы AM и BN треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке P (рис. 39). Обозначим $PM = x$, $PN = y$. Тогда по теореме о медианах $AP = 2x$, $BP = 2y$. Применив теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам APN и BPM, получим: $x^2 + 4y^2 = \frac{b^2}{4}$, $4x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$. Поэтому $5x^2 + 5y^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$, $x^2 + y^2 = \frac{a^2+b^2}{20}$. Из прямоугольного треугольника APB находим, что $c^2 = AB^2 = 4x^2 + 4y^2 = \frac{a^2+b^2}{5}$, откуда $a^2 + b^2 = 5c^2$.

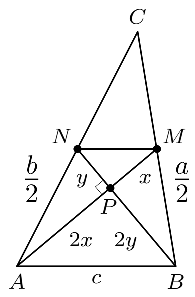


Рис. 39

Задачи первого уровня

2.158. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) известно, что $AB = 4$, $\angle A = 60°$. Найдите BC и AC.

2.159. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) известно, что $\angle A = \alpha$, $BC = a$. Найдите гипотенузу и второй катет.

2.160. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, если гипотенуза равна 8, а один из острых углов равен $60°$.

2.161. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен $120°$, а основание равно 8. Найдите боковую сторону.

2.162. Найдите диагональ прямоугольника со сторонами 5 и 12.

2.163. Основания прямоугольной трапеции равны 6 и 8. Один из углов при меньшем основании равен $120°$. Найдите диагонали трапеции.

2.164. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки, равные a и b. Найдите катеты.

2.165. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, равна a и делит сторону пополам. Острый угол параллелограмма равен $30°$. Найдите диагонали параллелограмма.

2.166. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна стороне AB. Высота BM параллелограмма делит сторону AD на отрезки $DM = 9$ и $AM = 4$. Найдите стороны и диагонали параллелограмма.

2.167. Найдите расстояние от центра окружности радиуса 10 до хорды, равной 12.

2.168. Прямая, проходящая через точку M, удаленную от центра окружности радиуса 10 на расстояние, равное 26, касается окружности в точке A. Найдите AM.

2.169. Прямые, касающиеся окружности с центром O в точках A и B, пересекаются в точке M. Найдите хорду AB, если отрезок MO делится ею на отрезки, равные 2 и 18.

2.170. Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность радиуса 8.

2.171. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите гипотенузу и второй катет.

2.172. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 12 и делит прямой угол в отношении $1:2$. Найдите стороны треугольника.

2.173. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 16. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе.

2.174. Найдите высоту трапеции со сторонами, равными 10, 10, 10 и 26.

2.175. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведенную к основанию, если стороны треугольника равны 10, 13 и 13.

2.176. Найдите высоту, а также радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника со стороной, равной a.

2.177. Вершина M правильного треугольника ABM со стороной a расположена на стороне CD прямоугольника $ABCD$. Найдите диагональ прямоугольника $ABCD$.

2.178. Дан отрезок, равный 1. Постройте отрезки, равные $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

2.179. Даны отрезки a и b. Постройте отрезки $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$.

2.180$^{\mathbf{0}}$. Докажите, что произведение стороны треугольника на проведенную к ней высоту для данного треугольника постоянно.

2.181. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 16. Найдите высоту, проведенную из вершины прямого угла.

2.182. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведенную к боковой стороне, если основание равно a, а боковая сторона равна b.

2.183. Точка M расположена на стороне CD квадрата $ABCD$ с центром O, причем $CM : MD = 1 : 2$. Найдите стороны треугольника AOM, если сторона квадрата равна 6.

2.184. Дан треугольник со сторонами 13, 14 и 15. Найдите высоту, проведенную к большей стороне.

2.185^{0}. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора. Верна ли она?

2.186. Найдите высоту трапеции, боковые стороны которой равны 6 и 8, а основания равны 4 и 14.

2.187. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки длиной a и b. Найдите диагонали ромба.

2.188. Одно основание прямоугольной трапеции вдвое больше другого, а боковые стороны равны 4 и 5. Найдите диагонали трапеции.

2.189. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон находится на гипотенузе. Боковые отрезки гипотенузы равны a и b. Найдите сторону квадрата.

2.190. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6, так, что угол в 60° у них общий, а остальные вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите стороны треугольника.

2.191. Две вершины квадрата расположены на основании равнобедренного треугольника, а две другие — на его боковых сторонах. Найдите сторону квадрата, если основание треугольника равно a, а угол при основании равен 30°.

2.192. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если известно, что центр ее описанной окружности лежит на большем основании.

2.193. Хорда AC окружности радиуса R образует с диаметром AB угол α. Найдите расстояние от точки C до диаметра AB.

2.194. Диагональ равнобокой трапеции равна a, а средняя линия равна b. Найдите высоту трапеции.

2.195. Прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом. Бо́льшая боковая сторона трапеции равна 8, а разность оснований равна 10. Найдите меньшую боковую сторону.

2.196. Радиус окружности, вписанной в ромб, равен r, а острый угол ромба равен α. Найдите сторону ромба.

2.197. Отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, делится их общей хордой на отрезки, равные 5 и 2. Найдите общую хорду, если известно, что радиус одной окружности вдвое больше радиуса другой.

2.198. Из точки M проведены касательные MA и MB к окружности с центром O (A и B — точки касания). Найдите радиус окружности, если $\angle AMB = \alpha$ и $AB = a$.

Задачи второго уровня

2.199. Найдите основание равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна a, а высота, опущенная на основание, равна отрезку, соединяющему середину основания с серединой боковой стороны.

2.200. Сторона треугольника равна 2, прилежащие к ней углы равны 30° и 45°. Найдите остальные стороны треугольника.

2.201. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{3}{5}$, высота, опущенная на основание, равна h. Найдите высоту, опущенную на боковую сторону.

2.202. Вершины M и N равностороннего треугольника BMN лежат соответственно на сторонах AD и CD квадрата $ABCD$ со стороной a. Найдите MN.

2.203. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен R. Угол при основании равен α. Найдите стороны треугольника.

2.204. Даны отрезки a и b. Постройте отрезок $\sqrt{ab}$.

2.205. Высота CD треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AD и BD, причем $AD \cdot BD = CD^2$. Верно ли, что треугольник ABC прямоугольный?

2.206. Найдите $\sin 15^\circ$ и $\operatorname{tg} 15^\circ$.

2.207. Медианы, проведенные к катетам прямоугольного треугольника, равны a и b. Найдите гипотенузу треугольника.

2.208. Две стороны треугольника равны a и b. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

2.209. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите CK, если $BC = a$ и $AC = b$.

2.210. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные a и b. Найдите основание треугольника.

2.211. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D, причем $AD : DB = 1 : 3$. Высота, опущенная на гипотенузу, равна 3. Найдите катет BC.

2.212. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота из вершины C прямого угла. На этой высоте как на диаметре построена окружность. Известно, что эта окружность высекает на катетах отрезки, равные 12 и 18. Найдите катеты треугольника ABC.

2.213. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна a и образует угол α с медианой, проведенной из той же вершины. Найдите катеты треугольника.

2.214. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12. Найдите катеты треугольника.

2.215. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найдите все стороны трапеции, если ее высота равна 12, а биссектрисы равны 15 и 13.

2.216. Диагональ AC равнобокой трапеции $ABCD$ равна a и образует с бо́льшим основанием AD и боковой стороной AB углы α и β соответственно. Найдите основания трапеции.

2.217. В трапеции $ABCD$ основание $AD = 2$, основание $BC = 1$. Боковые стороны $AB = CD = 1$. Найдите диагонали трапеции.

2.218. Основания трапеции равны 3 и 5, одна из диагоналей перпендикулярна боковой стороне, а другая делит пополам угол при большем основании. Найдите высоту трапеции.

2.219. Боковая сторона AD и основание CD трапеции $ABCD$ равны a, основание AB равно $2a$, а диагональ AC равна b. Найдите боковую сторону BC.

2.220. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 21, а катет BC равен 28. Окружность, с центром на гипотенузе AB, касается обоих катетов. Найдите радиус окружности.

2.221. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника проведен к ней перпендикуляр. Отрезок этого перпендикуляра, заключенный внутри треугольника, равен c, а отрезок, заключенный между одним катетом и продолжением другого, равен $3c$. Найдите гипотенузу.

2.222$^{\mathbf{0}}$. Окружность, вписанная в трапецию, делит ее боковую сторону на отрезки a и b. Найдите радиус окружности.

2.223. Окружность радиуса R вписана в прямоугольную трапецию, меньшее основание которой равно $\frac{4R}{3}$. Найдите остальные стороны трапеции.

2.224. Даны окружности радиусов r и R $(R > r)$. Расстояние между их центрами равно a $(a > R+r)$. Найдите отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключенные между точками касания.

2.225. Окружности радиусов r и R $(R > r)$ касаются внешним образом в точке K. К ним проведены две общие внешние касательные. Их точки касания с меньшей окружностью — A и D, с большей — B и C соответственно.

а) Найдите AB и отрезок MN общей внутренней касательной, заключенный между внешними касательными.

б) Докажите, что углы AKB и O_1MO_2 прямые (O_1 и O_2 — центры окружностей).

в) Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и их общей внешней касательной.

2.226. В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD перпендикулярна основаниям AD и BC, сумма острых углов A и C равна 90°. Основания $AD = a$, $BC = b$. Найдите боковые стороны AB и CD.

2.227. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60°. Найдите высоту трапеции.

2.228. Стороны параллелограмма равны a и b, а угол между ними равен α. Найдите стороны и диагонали четырехугольника, образованного пересечением биссектрис внутренних углов параллелограмма.

2.229. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите CN, если катеты равны 1 и 4.

2.230. Основание CD, диагональ BD и боковая сторона AD трапеции $ABCD$ равны p. Боковая сторона BC равна q. Найдите диагональ AC.

2.231. Хорды AB и CD окружности радиуса R пересекаются под прямым углом. Найдите BD, если $AC = a$.

2.232. На гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами a и b во внешнюю сторону построен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

2.233. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

2.234. В круге проведены два диаметра AB и CD, M — некоторая точка. Известно, что $AM = 15$, $BM = 20$ и $CM = 24$. Найдите DM.

2.235. Катет прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол равен 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведенной из вершины прямого угла.

2.236. Окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух его других сторон, называется *вневписанной* окружностью треугольника.

Найдите расстояние между центром вписанной окружности прямоугольного треугольника с углом 30° и центром его вневписанной окружности, касающейся меньшего катета, если радиус вписанной окружности равен r.

2.237. Найдите радиусы вписанной и вневписанных окружностей треугольника со сторонами: а) 5, 12, 13; б) 10, 10, 12.

2.238. В треугольнике PQR угол QRP равен 60°. Найдите расстояние между точками касания со стороной QR окружности радиуса 2, вписанной в треугольник, и окружности радиуса 3, касающейся продолжений сторон PQ и PR.

2.239. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\sqrt{3} - 1$. Угол BAC этого треугольника равен 60°, а радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, равен $\sqrt{3}+1$. Найдите углы ABC и ACB данного треугольника.

2.240. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности (K — точка касания), $\angle OAK = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

2.241. К двум окружностям, касающимся внешним образом в точке C, проведена общая внешняя касательная, A и B — точки касания. Найдите радиусы окружностей, если $AC = 6$, $BC = 8$.

2.242. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R. Его диагонали взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке P. Найдите

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 \quad \text{и} \quad AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2.$$

2.243. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

Задачи третьего уровня

2.244. Вершины прямоугольника, не являющегося квадратом, расположены по одной на каждой стороне некоторого квадрата. Докажите, что стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата.

2.245. Найдите геометрическое место точек M, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B постоянна.

2.246. Найдите геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к двум данным окружностям, равны между собой.

2.247. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

2.248. Используя результат предыдущей задачи, докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

2.249. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найдите его площадь, если радиус описанной окружности равен R и $BC = 2AB$.

2.250. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle A = 90°$) и два квадрата $BEFC$ и $AMNB$ расположены так, что точки E и A лежат по разные стороны от прямой BC, а точки M и C — по разные стороны от прямой AB. Найдите расстояние между центрами квадратов, если $AB = b$, $AC = a$.

2.251. На высотах BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC взяты точки B_2 и C_2 так, что $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90°$. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

§ 2.5. Декартовы координаты на плоскости

Если точка $M(x_0; y_0)$ — середина отрезка с концами в точках $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$ и $y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$.

Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ равно

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Окружность радиуса R с центром в точке $A(a; b)$ имеет уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Любая прямая в декартовых координатах xy имеет уравнение $ax + by + c = 0$, где a, b и c — некоторые числа, причем хотя бы одно из чисел a и b отлично от нуля.

Любая прямая, не параллельная оси ординат, имеет уравнение $y = kx + l$. Число k называется *угловым коэффициентом* прямой. Угловой коэффициент прямой с точностью до знака равен тангенсу острого угла, который образует прямая с осью Ox.

Пример 1. Даны точки $A(-9; 2)$, $B(1; 6)$, $C(7; 3)$ и $D(-3; -1)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Решение. Координаты середины диагонали AC равны $\frac{1}{2}(-9 + 7) = -1$ и $\frac{1}{2}(2 + 3) = \frac{5}{2}$, а координаты середины отрезка BD равны $\frac{1}{2}(1 - 3) = -1$ и $\frac{1}{2}(6 - 1) = \frac{5}{2}$. Поэтому диагонали четырехугольника $ABCD$ имеют общую середину, т. е.

делятся точкой пересечения пополам. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм.

Пример 2. Докажите, что любая прямая, не проходящая через начало координат и не параллельная осям координат, может быть задана уравнением $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. Каков геометрический смысл чисел p и q?

Решение. Если прямая, не проходящая через начало координат и не параллельная осям координат, задана уравнением $ax+by+c = 0$, то числа a, b и c отличны от 0. Разделив обе части этого уравнения на c, после очевидных преобразований получим уравнение $\frac{x}{-c/a} + \frac{y}{-c/b} = 1$. Обозначив $-c/a = p$ и $-c/b = q$, получим уравнение $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Если $x = 0$, то $y = q$, т. е. данная прямая пересекает ось ординат в точке $(0; q)$. Если $y = 0$, то $x = p$, т. е. прямая пересекает ось абсцисс в точке $(p; 0)$.

Пример 3. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек M, для которых $AM = 2BM$.

Решение. Пусть расстояние между данными точками A и B равно a. Поместим начало координат в точку A, ось абсцисс направим вдоль луча AB, а ось ординат — вдоль луча AY, перпендикулярного AB (рис. 40). Тогда точка A имеет координаты $(0; 0)$, а точка B — $(a; 0)$. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка плоскости. Условие $AM = 2BM$ равносильно условию $AM^2 = 4BM^2$ или $x^2 + y^2 = 4(x-a)^2+4y^2$. После раскрытия скобок, приведения подобных и выделения полного квадрата получим уравнение

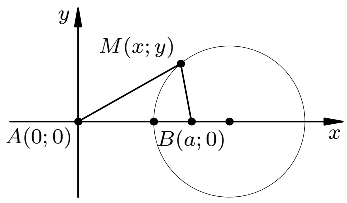


Рис. 40

$$\left(x - \frac{4}{3}a\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}a^2.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $\left(\frac{4}{3}a; 0\right)$ и радиусом $\frac{2}{3}a$.

Ответ. Окружность.

Задачи первого уровня

2.252. Даны точки $A(-1;5)$ и $B(3;-7)$. Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка AB.

2.253. Даны точки $A(3;5)$, $B(-6;-2)$ и $C(0;-6)$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

2.254. Даны точки $A(2;4)$, $B(6;-4)$ и $C(-8;-1)$. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

2.255. Докажите, что точки $A(-1;-2)$, $B(2;-1)$ и $C(8;1)$ лежат на одной прямой.

2.256. Даны точки $A(-2;1)$, $B(2;5)$ и $C(4;-1)$. Точка D лежит на продолжении медианы AM за точку M, причем четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм. Найдите координаты точки D.

2.257. Дана точка $M(-1;3)$. Найдите координаты точки, симметричной точке M относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) начала координат; г) точки $K(3;1)$; д) биссектрисы I и III координатных углов; е) биссектрисы II и IV координатных углов.

2.258. Даны точки $A(-2;0)$, $B(1;6)$, $C(5;4)$ и $D(2;-2)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

2.259. Даны точки $A(0;-2)$, $B(-2;1)$, $C(0;0)$ и $D(2;-9)$. Укажите те из них, которые лежат на прямой $2x-3y+7=0$.

2.260. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3;1)$ параллельно: а) оси Ox; б) оси Oy.

2.261. Найдите расстояние между точкой $A(1;7)$ и точкой пересечения прямых $x-y-1=0$ и $x+3y-12=0$.

2.262. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3;2)$ параллельно прямой $2x-3y+4=0$.

2.263. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x+2y-5=0$ и $x-3y+2=0$ параллельно оси ординат.

2.264. Найдите координаты вершин треугольника, стороны которого лежат на прямых $2x+y-6=0$, $x-y+4=0$ и $y+1=0$.

2.265. Даны точки $A(-2;2)$, $B(-2;-2)$ и $C(6;6)$. Составьте уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника ABC.

2.266. Даны точки $A(4;1)$, $B(-8;0)$ и $C(0;-6)$. Составьте уравнение прямой, на которой лежит медиана AM треугольника ABC.

2.267. Окружность с центром в точке $M(3;1)$ проходит через начало координат. Составьте уравнение окружности.

2.268. Найдите радиус и координаты центра окружности, заданной уравнением: а) $(x-3)^2+(y+2)^2=16$; б) $x^2+y^2-2(x-3y)-15=0$; в) $x^2+y^2=x+y+\frac{1}{2}$.

2.269. Даны точки $A(0;0)$, $B(4;0)$ и $C(0;6)$. Составьте уравнение окружности, описанной около треугольника ABC.

2.270. Найдите длину хорды, которую на прямой $y=3x$ высекает окружность $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

2.271. Докажите, что прямая $3x-4y+25=0$ касается окружности $x^2+y^2=25$, и найдите координаты точки касания.

2.272. Составьте уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(2;1)$.

2.273. Найдите координаты точек пересечения окружностей

$$(x-2)^2+(y-10)^2=50 \quad \text{и} \quad x^2+y^2+2(x-y)-18=0.$$

2.274. Даны точки $A(0;0)$, $B(-2;1)$, $C(3;3)$, $D(2;-1)$ и окружность $(x-1)^2+(y+3)^2=25$. Выясните, где расположены эти точки: на окружности, внутри или вне окружности.

Задачи второго уровня

2.275. Даны точки $A(-6;1)$ и $B(4;6)$. Найдите координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении $2:3$, считая от точки A.

2.276. Даны точки $A(5;5)$, $B(8;-3)$ и $C(-4;1)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

2.277. Даны точки $A(-6;-1)$, $B(1;2)$ и $C(-3;-2)$. Найдите координаты вершины M параллелограмма $ABMC$.

2.278. Даны точки $A(-1;3)$, $B(1;-2)$, $C(6;0)$ и $D(4;5)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат.

2.279$^{\mathbf{0}}$. Известно, что прямая с угловым коэффициентом k проходит через точку $M(x_0;y_0)$. Докажите, что ее уравнение имеет вид $y-y_0=k(x-x_0)$.

2.280$^{\mathbf{0}}$. Известно, что прямая проходит через точки $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$, причем $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Докажите, что ее уравнение имеет вид $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

2.281. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A(-2; 1)$, $B(9; 3)$ и $C(1; 7)$.

2.282. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(0; 7)$ и касающейся окружности $(x-15)^2 + (y-2)^2 = 25$.

2.283$^{\mathbf{0}}$. Докажите, что прямые, заданные уравнениями $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$, перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2 = -1$.

2.284. Даны точки $A(-2; 3)$, $B(2; 6)$, $C(6; -1)$ и $D(-3; -4)$. Докажите, что диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны.

2.285. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1; 4)$ перпендикулярно прямой $x - 2y + 4 = 0$.

2.286. Даны точки $A(6; 1)$, $B(-5; -4)$, $C(-2; 5)$. Составьте уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенная из вершины A.

2.287. Даны точки $A(5; -1)$, $B(4; -8)$, $C(-4; -4)$. Найдите координаты точки пересечения высот треугольника ABC.

2.288. С помощью метода координат докажите, что суммы квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до противоположных вершин прямоугольника равны между собой.

2.289. С помощью метода координат найдите геометрическое место точек плоскости, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна.

2.290. Даны точки A, B и положительное число k. Найдите геометрическое место точек M, для которых $AM = kBM$.

2.291. Даны точки A, B и положительное число d. Найдите геометрическое место точек M, для которых $AM^2 + BM^2 = d$.

2.292. Докажите, что расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, равно $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2.293. Найдите расстояние между параллельными прямыми $y = -3x + 5$ и $y = -3x - 4$.

2.294. Составьте уравнение окружности с центром в точке $M(3; 2)$, касающейся прямой $y = 2x + 6$.

2.295. Точка M лежит на прямой $3x - 4y + 34 = 0$, а точка N — на окружности $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$. Найдите наименьшее расстояние между точками M и N.

2.296. Даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и неотрицательное число λ. Найдите координаты точки M луча AB, для которой $AM : AB = \lambda$.

Задачи третьего уровня

2.297. Даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и прямая $ax + by + c = 0$. Известно, что $ax_1 + by_1 + c > 0$, а $ax_2 + by_2 + c < 0$. Докажите, что точки A и B расположены по разные стороны от этой прямой.

2.298. Найдите наименьшее значение выражения $|a + b| + \sqrt{(a-1)^2 + (b-3)^2}$.

2.299. Две окружности касаются внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает окружности в точках B и C. Найдите геометрическое место середин отрезков BC.

2.300. На координатной плоскости нарисовали график функции $y = x^2$, а затем стерли оси координат. Восстановите их с помощью циркуля и линейки.

2.301. Назовем точку плоскости рациональной, если ее обе координаты — рациональные числа. Докажите, что если на окружности $x^2 + y^2 = R$ (R — целое) есть хотя бы одна рациональная точка, то на этой окружности бесконечно много рациональных точек.

§ 2.6. Движение

Преобразование одной фигуры в другую называется *движением*, если оно сохраняет расстояние между точками.

При движении прямые переходят в прямые, лучи — в лучи, отрезки — в отрезки. При движении сохраняются углы между лучами.

Симметрия относительно точки, симметрия относительно прямой, поворот, параллельный перенос являются движениями.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Точка X' называется *симметричной* точке X относительно точки O, если O — середина отрезка XX'.

Теорема. *При центральной симметрии каждый луч переходит в противоположно направленный с ним луч.*

Доказательство. Пусть точка A — начало луча l, X — произвольная точка этого луча, A_1 и X_1 — образы точек A и X при симметрии относительно точки O (рис. 41). Из определения центральной симметрии следует, что точки X и X_1 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AA_1, и треугольники A_1OX_1 и AOX равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, прямые AX и A_1X_1 параллельны. Аналогично докажем, что образ Y_1 любой точки Y луча AX принадлежит лучу A_1X_1. Ясно, что любая точка луча A_1X_1 является образом какой-то точки луча AX.

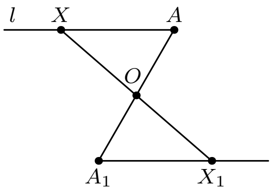


Рис. 41

Пример 1. На противоположных сторонах параллелограмма как на сторонах построены вне параллелограмма два равносторонних треугольника. Докажите, что прямая, соединяющая их вершины, лежащие вне параллелограмма, проходит через центр параллелограмма.

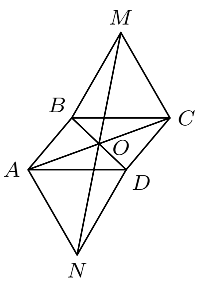


Рис. 42

Решение. Пусть M и N — вершины равносторонних треугольников BMC и DNA, построенных вне параллелограмма $ABCD$ с центром O (рис. 42). Тогда $BM \parallel DN$ и $CM \parallel AN$. При симметрии относительно точки O луч BM переходит в луч DN, а луч CM — в луч AN. Поэтому точка M пересечения лучей BM и CM переходит в точку пересечения N лучей DN и AN. Поскольку точка N симметрична точке M относительно точки O, точки M, O и N лежат на одной прямой.

Пример 2. Дан параллелограмм и точка N на одной из его сторон. Постройте ромб, одна вершина которого — точка N, а остальные три вершины лежат на трех других сторонах параллелограмма.

Решение. Пусть точка N лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$ с центром O (рис. 43). Предположим, что вершины K, L и M искомого ромба $KLMN$ расположены на сторонах AB, AD и CD соответственно. Тогда точка O — центр симметрии параллелограмма $ABCD$ и ромба $KLMN$, причем $KM \perp NL$.

Отсюда вытекает следующее построение. Строим образ L данной точки N при симметрии относительно точки O пересечения диагоналей данного параллелограмма. Точка L лежит на стороне AD. Через точку O проводим прямую, перпендикулярную NL. Если эта прямая пересекает стороны AB и CD в точках K и M соответственно, то эти точки — вершины искомого ромба $KLMN$.

Пример 3. Через данную точку проведите прямую, отрезок которой, заключенный между двумя данными окружностями, делился бы этой точкой пополам.

Решение. Предположим, что задача решена (рис. 44). Пусть A и B — точки на окружностях с центрами O_1 и O_2 соответственно, M — данная середина отрезка AB. При симметрии относительно точки M точка A переходит в точку B, а окружность с центром O_1 — в равную ей окружность с некоторым центром O, проходящую через точку B.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Строим образ данной окружности с центром O_1 при симметрии относительно данной точки M. Для этого достаточно построить точку O, симметричную O_1 относительно M, и провести окруж-

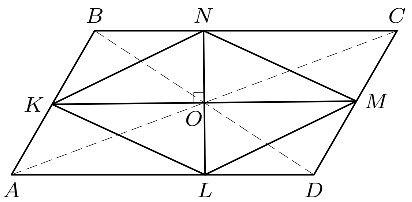


Рис. 43

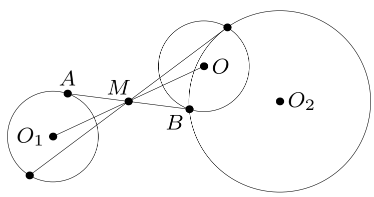


Рис. 44

ность с центром O радиусом, равным радиусу данной окружности с центром O_1. Если построенная окружность пересекает вторую данную окружность, то каждая точка пересечения является искомой точкой A. Задача имеет либо два решения, либо одно, либо ни одного решения.

Задачи первого уровня

2.302. Постройте образы данной прямой и данной окружности при симметрии относительно данной точки.

2.303. Пусть M — середина отрезка AB. Точки A', B' и M' — образы точек соответственно A, B и M при симметрии относительно некоторой точки O. Докажите, что M' — середина отрезка $A'B'$.

2.304. Докажите, что фигура, состоящая из двух равных параллельных отрезков, имеет центр симметрии.

2.305. Докажите, что четырехугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом.

2.306. На противоположных сторонах параллелограмма как на сторонах построены вне параллелограмма два квадрата. Докажите, что прямая, соединяющая их центры, проходит через центр параллелограмма.

2.307. Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

2.308. Найдите координаты образа точки $M(x; y)$ при симметрии относительно: а) начала координат; б) точки $A(a; b)$.

2.309. Пусть a и b — некоторые числа. Каждой точке $M(x; y)$ координатной плоскости поставим в соответствие точку $M'(x'; y')$, для которой $x' = 2a - x$ и $y' = 2b - y$. Докажите, что это соответствие есть центральная симметрия плоскости. Каковы координаты центра симметрии?

Задачи второго уровня

2.310. Выпуклый многоугольник имеет центр симметрии. Докажите, что сумма его углов делится на 360°.

2.311. Дан угол и точка внутри него. С помощью центральной симметрии проведите через данную точку прямую, отрезок которой, заключенный внутри угла, делился бы этой точкой пополам.

2.312. Проведите через общую точку A пересекающихся окружностей S_1 и S_2 прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

2.313. Даны две концентрические окружности S_1 и S_2. Постройте прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

2.314. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M. Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что проведенные прямые пересекаются в одной точке.

2.315. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что он имеет центр симметрии.

2.316. При симметрии относительно точки пересечения медиан треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ при пересечении образуют шестиугольник $KLMNOP$. Докажите, что диагонали KN, LO и MP этого шестиугольника пересекаются в одной точке, и найдите стороны шестиугольника, если стороны треугольника ABC равны a, b и c.

2.317. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, параллельными сторонам, равны между собой.

2.318. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOB и COD, касаются.

2.319. Существуют фигуры, имеющие бесконечное множество центров симметрии (например, полоса между двумя параллельными прямыми). Может ли фигура иметь более одного, но конечное число центров симметрии?

Задачи третьего уровня

2.320. (*Теорема Монжа.*) Докажите, что прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.

2.321. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D. Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина отрезка CD. Докажите, что угол MKN равен $90°$. (Можно считать, что точки C и D лежат по разные стороны от точки A.)

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

Точка X', не лежащая на прямой l, называется *симметричной* точке X относительно прямой l, если отрезок XX' перпендикулярен прямой l и делится ею пополам. Если точка X лежит на прямой l, то говорят, что точка X *симметрична самой себе относительно прямой* l. Прямая l называется *осью симметрии*.

Пример 1. Докажите, что диагональ ромба является его осью симметрии.

Решение. Диагонали ромба перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам, поэтому при симметрии относительно диагонали AC вершины B и D ромба $ABCD$ переходят друг в друга (рис. 45). При этом вершины A и B переходят сами в себя, так как они лежат на оси симметрии. Следовательно, ромб $ABCD$ симметричен относительно диагонали AC. Аналогично для диагонали BD.

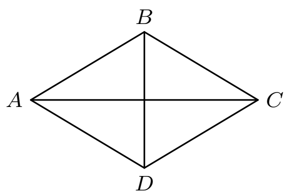


Рис. 45

Пример 2. Постройте треугольник по данным серединам двух его сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к третьей стороне.

Решение. Предположим, что задача решена. Пусть ABC — искомый треугольник, M и N — середины сторон AB и AC соответственно (рис. 46). При симметрии относительно биссектрисы угла при вершине A луч AC переходит в луч AB, поэтому точка N луча AC переходит в некоторую точку N_1 луча AB. Из этих рассуждений вытекает следующее построение. Строим образ N_1 данной точки N относительно данной прямой. Если точка N_1 не совпадает со второй данной точкой M, проводим прямую через точки N_1 и M. Если эта прямая пересекается с данной прямой в точке A, то A — вершина искомого треугольника. Отложив на продолжениях отрезков AN и AM за точки N и M соответственно отрезки NC и MB, равные AN и AM, получим вершины C и B искомого треугольника ABC. Если точки N_1 и M совпадают, задача имеет бесконечно много решений. Если точки N_1 и M различны, но прямая N_1M параллельна данной прямой, задача не имеет решений.

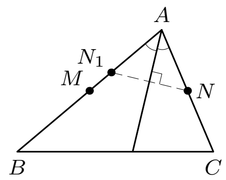


Рис. 46

Пример 3. Среди всех треугольников ABC с данным углом C и стороной AB найдите треугольник с наибольшим возможным периметром.

Решение. Пусть A_1 — точка, симметричная вершине A относительно биссектрисы внешнего угла C треугольника ABC (рис. 47). Тогда $BA_1 = A_1C + BC = AC + BC$. Поскольку $\angle AA_1B = \frac{1}{2}\angle ACB$, точка A_1 лежит на окружности, проходящей через точки A и B, причем $\smile AB = \angle C$. Если BA_1 максимально, то BA_1 — диаметр. Тогда точка C — центр этой окружности и $CA = CB$.

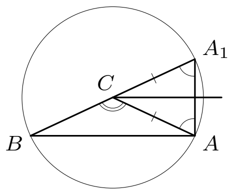


Рис. 47

Ответ. Равнобедренный треугольник.

Задачи первого уровня

2.322. Постройте образы данной прямой и данной окружности при симметрии относительно данной прямой.

2.323. Докажите, что: а) биссектриса — ось симметрии угла; б) серединный перпендикуляр — ось симметрии отрезка.

2.324. Докажите, что серединный перпендикуляр к стороне прямоугольника является его осью симметрии.

2.325. Пусть M и N — середины оснований трапеции. Докажите, что если прямая MN перпендикулярна основаниям, то трапеция — равнобедренная.

2.326. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC, пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB, если $BM = a$, $KC = b$.

2.327. Существует ли фигура, не имеющая осей симметрии, но переходящая в себя при некотором повороте?

2.328. Существует ли фигура, не имеющая ни осей симметрии, ни центров симметрии, но переходящая в себя при некотором повороте?

2.329. Найдите координаты точки, симметричной точке $M(x; y)$ относительно: а) оси ординат; б) оси абсцисс; в) прямой $x = a$; г) прямой $y = b$; д) прямой $y = x$; е) прямой $y = -x$.

Задачи второго уровня

2.330. Фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии. Докажите, что она имеет центр симметрии.

2.331. Существует ли фигура, имеющая ровно две оси симметрии, но не имеющая центра симметрии?

2.332. Четырехугольник имеет ровно две оси симметрии. Верно ли, что он — либо прямоугольник, либо ромб?

2.333. Может ли пятиугольник иметь ровно две оси симметрии?

2.334. Может ли фигура иметь центр симметрии и ровно одну ось симметрии?

2.335. Докажите, что всякий выпуклый четырехугольник с осью симметрии либо вписанный, либо описанный.

2.336. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой l. Постройте на этой прямой точку M так, чтобы прямая l делила угол AMB пополам.

2.337. Точки M и N расположены по одну сторону от прямой l. Как из точки M направить луч света, чтобы он, отразившись от прямой l, попал в точку N?

2.338. Внутри острого угла даны точки M и N. Как из точки M направить луч света, чтобы он, отразившись последовательно от сторон угла, попал в точку N?

2.339. AB — диаметр окружности; C, D, E — точки на одной полуокружности $ACDEB$. На диаметре AB взяты точка F так, что $\angle CFA = \angle DFB$, и точка G так, что $\angle DGA = \angle EGB$. Найдите $\angle FDG$, если дуга AC равна 60°, а дуга BE равна 20°.

2.340. Внутри острого угла даны точки M и N. Постройте на сторонах угла точки K и L так, чтобы периметр четырехугольника $MKLN$ был наименьшим.

2.341. Постройте треугольник по данным серединам двух его сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к одной из этих сторон.

2.342. В треугольнике ABC проведена высота AH. O — центр описанной окружности. Докажите, что $\angle OAH = |\angle B - \angle C|$.

2.343. Точки M и N расположены по разные стороны от прямой l. Постройте на прямой l такую точку K, чтобы разность отрезков MK и NK была наибольшей.

2.344. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам, если известно, что его диагональ AC является биссектрисой угла A.

2.345. Постройте четырехугольник $ABCD$ по двум сторонам AB и AD и двум углам B и D, если известно, что в него можно вписать окружность.

2.346. Постройте треугольник, если дана одна его вершина и три прямых, на которых лежат его биссектрисы.

2.347. Постройте треугольник по двум сторонам и разности углов, прилежащих к третьей.

2.348. Постройте треугольник по двум углам и разности противолежащих им сторон.

2.349. Постройте треугольник по разности двух сторон, углу между ними и стороне, противолежащей этому углу.

2.350. AD — биссектриса угла A в треугольнике ABC. Через точку A проведена прямая, перпендикулярная к AD, и из вершины B опущен перпендикуляр BB_1 на эту прямую. Докажите, что периметр треугольника BB_1C больше периметра треугольника ABC.

Задачи третьего уровня

2.351. Постройте треугольник по центру его описанной окружности и двум прямым, на которых лежат высоты.

2.352. (*Задача Фаньяно.*) Впишите в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра.

ПОВОРОТ

Точка X' называется *образом* точки X, отличной от точки O, при повороте на угол α относительно точки O, если $OX' = OX$ и $\angle XOX' = \alpha$. Образом точки O при этом повороте называется сама точка O.

Пример 1. При повороте на угол 90° относительно центра параллелограмм перешел сам в себя. Докажите, что этот параллелограмм — квадрат.

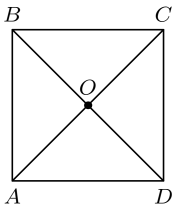


Рис. 48

Решение. Пусть диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 48). Если при повороте на угол 90° относительно точки O вершина A переходит в вершину B, то $OA = OB$ и $OA \perp OB$. Поэтому $AC = 2OA = 2OB = BD$ и $AC \perp BD$. Значит, параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник и ромб. Следовательно, $ABCD$ — квадрат.

Пример 2. Постройте равносторонний треугольник ABC с вершинами на трех данных параллельных прямых.

Решение. Предположим, что нужный треугольник ABC построен. Пусть его вершины A, B, и C лежат на данных параллельных прямых l_1, l_2 и l_3 соответственно (рис. 49). При повороте на 60° относительно точки A, переводящем вершину C в вершину B, прямая l_3 перейдет в некоторую прямую l, пересекающую l_2 в точке B.

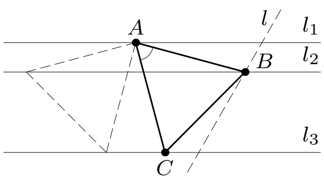


Рис. 49

Отсюда вытекает следующий способ построения. Возьмем на прямой l_1 произвольную точку A. Образ прямой l_3 при повороте на угол 60° относительно точки A пересекает прямую l_2 в вершине B искомого равностороннего треугольника.

Пример 3. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P. Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P, из A_2 — на A_3P, из A_3 — на A_4P, из A_4 — на A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Решение. При повороте относительно центра квадрата на 90°, переводящем точку A_1 в точку A_2 (рис. 50), перпендикуляры, опущенные из вершин A_1, A_2, A_3, A_4, переходят в прямые A_2P, A_3P, A_4P и A_1P соответственно. Поэтому точкой их пересечения является образ точки P при обратном повороте.

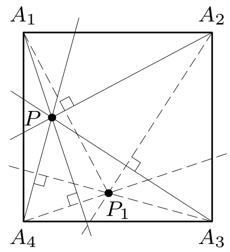


Рис. 50

Задачи первого уровня

2.353. Постройте образы данной прямой и данной окружности при повороте на данный угол относительно данной точки.

2.354. Через точку внутри данного круга проведите хорду, отсекающую от окружности дугу заданной угловой величины.

2.355⁰. Докажите, что треугольник ABC является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на 60° (либо по часовой стрелке, либо против) относительно точки A вершина B переходит в C.

2.356. Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата также являются вершинами квадрата.

2.357. Пусть две прямые пересекаются в точке O под углом α. Докажите, что при повороте на угол α (в одном из направлений) относительно произвольной точки, отличной от O, одна из этих прямых перейдет в прямую, параллельную другой.

2.358. Найдите координаты образа точки $M(x;y)$ при повороте относительно начала координат на угол 90°: а) против часовой стрелки; б) по часовой стрелке.

Задачи второго уровня

2.359. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ постройте точки M и N так, чтобы угол при вершине A равнобедренного треугольника MAN имел данную величину α.

2.360. Пусть M и N — середины сторон CD и DE правильного шестиугольника $ABCDEF$. Найдите величину угла между прямыми AM и BN.

2.361. Шестиугольник $ABCDEF$ правильный, K и M — середины отрезков BD и EF. Докажите, что треугольник AMK равносторонний.

2.362. Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого лежала бы на данной окружности, другая — на данной прямой, а третья — в данной точке.

2.363. Постройте квадрат, три вершины которого лежали бы на трех данных параллельных прямых.

2.364. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник с вершиной прямого угла в данной точке и с вершинами острых углов на двух данных окружностях.

2.365. Точка P лежит внутри равностороннего треугольника ABC. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны отрезкам PA, PB и PC.

2.366. Впишите квадрат в данный параллелограмм.

2.367. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; M и P — середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM — равносторонний.

2.368. Дан ромб $ABCD$ с острым углом A, равным $60°$. Прямая MN отсекает от сторон AB и BC отрезки MB и NB, сумма которых равна стороне ромба. Найдите углы треугольника MDN.

2.369. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята произвольная точка M. Докажите с помощью поворота, что $AM = BM + CM$.

2.370. Два квадрата $BCDA$ и $BKMN$ имеют общую вершину B. Докажите с помощью поворота, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBN лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов названы по часовой стрелке).

2.371. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

2.372. Дан правильный треугольник ABC. Некоторая прямая, параллельная прямой AC, пересекает прямые AB и BC в точках M и P, соответственно. Точка D — центр правильного треугольника PMB, точка E — середина отрезка AP. Найдите углы треугольника DEC.

2.373. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники ABC_1, AB_1C и A_1BC. Пусть P и Q — середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1. Докажите, что треугольник APQ равносторонний.

2.374. Из вершины A квадрата $ABCD$ внутрь квадрата проведены два луча, на которые опущены перпендикуляры BK, BL, DM, DN из вершин B и D. Докажите, что отрезки KL и MN равны и перпендикулярны друг другу.

2.375. Даны две точки и окружность. Через данные точки проведите две секущие, отрезки которых внутри данной окружности были бы равны и пересекались бы под данным углом α.

2.376. На сторонах треугольника ABC построены вне треугольника равносторонние треугольники BCA_1, CAB_1, ABC_1 и проведены отрезки AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что эти отрезки равны между собой.

2.377. Точка M лежит внутри квадрата $ABCD$, а точка K — вне, причем треугольники AMD и CKD равносторонние. Докажите, что точки B, M и K лежат на одной прямой.

2.378. Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$, причем $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Найдите угол APB.

Задачи третьего уровня

2.379. Вокруг квадрата описан параллелограмм (вершины квадрата лежат на разных сторонах параллелограмма). Докажите, что перпендикуляры, опущенные их вершин параллелограмма на стороны квадрата, образуют новый квадрат.

2.380. Дан треугольник ABC. На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.

2.381. (*Задача Ферма.*) Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Точка X' называется *образом* точки X при параллельном переносе, заданном парой точек A и B, если лучи XX' и AB сонаправлены и $XX' = AB$.

При параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую или в себя.

Пример 1. Постройте отрезок, равный и параллельный данному, так, чтобы его концы лежали на данной прямой и на данной окружности.

Решение. Предположим, что задача решена. Пусть AB — один из отрезков, равных и параллельных данному отрезку MN, причем точка A лежит на данной окружности S с центром O, а точка B — на данной прямой l (рис. 51). При параллельном переносе, переводящем точку M в точку N, точка A перейдет в точку B, а окружность S — в окружность S_1, причем точка B — одна из точек пересечения окружности S_1 с прямой l.

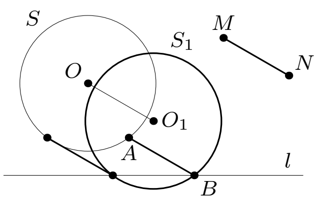


Рис. 51

Отсюда вытекает следующий способ построения. Пусть MN — данный отрезок. Построим образ S_1 данной окружности S при параллельном переносе, переводящем точку M в точку N. Пусть B — одна из точек пересечения окружности S_1 с данной прямой l. Тогда прообраз A точки B при этом параллельном переносе есть второй конец искомого отрезка. Если окружность S_1 не пересекает прямую l, то задача не имеет решений.

Пример 2. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую две данные деревни A и B, чтобы путь $AMNB$ из деревни A в деревню B был кратчайшим? (Берега реки считаются параллельными прямыми, мост предполагается перпендикулярным к реке.)

Решение. Предположим, что некоторое положение моста найдено (рис. 52). При параллельном переносе, переводящем точку M в точку N, точка A перейдет в некоторую точку A_1, а точка M — в точку N. Тогда $AM + MN + NB = AA_1 + A_1N + NB \geqslant AA_1 + A_1B$ (неравенство треугольника), причем равенство достигается, если точки A_1, N и B лежат на одной прямой, т. е. $BN \parallel AM$.

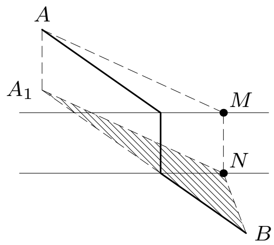


Рис. 52

Отсюда вытекает следующий способ построения. Отложим от точки A отрезок AA_1, по величине равный ширине реки и перпендикулярный к ее направлению; соединим точку A_1 с точкой B; точка N, полученная при пересечении A_1B с более близким к B берегом реки, определит положение моста.

Пример 3. Параллельно данной прямой проведите прямую, на которой две данные окружности высекали бы хорды, сумма (или разность) длин которых имела бы заданную величину a.

Решение. Рассмотрим случай, когда окружности расположены одна вне другой и сумма указанных хорд имеет заданную величину a. Предположим, что нужная прямая проведена (рис. 53). Пусть AB и CD хорды данных окружностей S_1 и S_2, параллельные данной прямой l, и $AB + CD = a$ (A, B, C и D — последовательные точки проведенной прямой). При параллельном переносе, переводящем точку C в точку B, окружность S_2 переходит в равную ей окружность S. Пусть Q_1, Q_2 и Q — проекции центров окружностей S_1, S_2 и S на проведенную прямую.

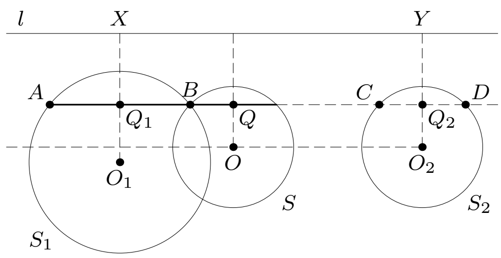


Рис. 53

Тогда Q_1, Q_2 и Q — середины соответствующих хорд. Поэтому $QQ_1 = QB + BQ_1 = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Совершим параллельный перенос одной из окружностей вдоль данной прямой на расстояние, равное $XY - \frac{a}{2}$, где X и Y — проекции центров данных окружностей на данную прямую. Если образ S окружности S_2 при этом переносе пересекает окружность S_1 в точке B, то прямая, проходящая через точку B параллельно данной прямой l, — искомая. Аналогичное решение для разности хорд.

Задачи первого уровня

2.382. Докажите, что при параллельном переносе окружность переходит в окружность.

2.383. Даны точки A и B. Рассмотрим параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B. Постройте образы данной прямой и окружности при этом параллельном переносе.

2.384. Дан угол ABC и прямая l. Параллельно прямой l проведите прямую, на которой стороны угла ABC высекают отрезок данной длины.

2.385. Постройте хорду данной окружности, равную и параллельную данному отрезку.

2.386. Постройте отрезок, равный и параллельный данному, так, чтобы его концы лежали на двух данных окружностях.

2.387. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Докажите, что существует выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями длины AB и BC, стороны которого равны AM, BM, CM, DM.

Задачи второго уровня

2.388. Две окружности радиуса R касаются в точке K. На одной из них взята точка A, а на другой — точка B, причем $\angle AKB = 90^\circ$. Докажите, что $AB = 2R$.

2.389. Две окружности радиуса R пересекаются в точках M и N. Пусть A и B — точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку MN с этими окружностями, лежащие по одну сторону от прямой MN. Докажите, что $MN^2 + AB^2 = 4R^2$.

2.390. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую так, чтобы часть ее, заключенная внутри окружностей, имела данную длину.

2.391. Параллельно данной прямой проведите прямую, на которой две данные окружности высекали бы равные хорды.

2.392. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем углам и сторонам $AB = a$ и $CD = b$.

2.393. Постройте четырехугольник по трем сторонам и углам, прилежащим к четвертой.

2.394. Постройте четырехугольник по диагоналям, углу между ними и двум каким-нибудь сторонам.

2.395. Постройте выпуклый четырехугольник по четырем сторонам и отрезку, соединяющему середины двух противоположных сторон.

2.396. Докажите, что композиция двух центральных симметрий есть параллельный перенос.

2.397. Докажите, что композиция двух осевых симметрий с параллельными осями есть параллельный перенос.

Задачи третьего уровня

2.398. Среди всех четырехугольников с данными диагоналями и данным углом между ними найдите четырехугольник наименьшего периметра.

§ 2.7. Векторы

Для любых трех точек A, B и C верны равенства

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}.$$

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *коллинеарны* тогда и только тогда, когда $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, где k — некоторое число.

Любой вектор можно единственным образом разложить по двум неколлинеарным векторам.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ называется число $x_1x_2 + y_1y_2$.

Свойства скалярного произведения.

1^0. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2^0. $\alpha\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

3^0. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

4^0. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

5^0. $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b}^2$.

6^0. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}((\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2)$.

7^0. *Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними*: $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi$.

8^0. *Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.*

Пример 1. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC, причем $BD : DC = m : n$. Выразите вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

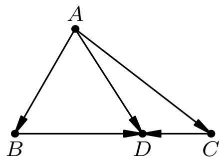


Рис. 54

Решение. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ (рис. 54). Умножим обе части первого равенства на n, второго на m и сложим почленно векторные равенства $n \cdot \overrightarrow{AD} = n \cdot \overrightarrow{AB} + n \cdot \overrightarrow{BD}$ и $m \cdot \overrightarrow{AD} = m \cdot \overrightarrow{AC} + m \cdot \overrightarrow{CD}$. Поскольку $n \cdot \overrightarrow{BD}$ и $m \cdot \overrightarrow{CD}$ — противоположные векторы, получим равенство $(m+n) \cdot \overrightarrow{AD} = n \cdot \overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{AC}$, откуда $\overrightarrow{AD} = \frac{n}{m+n} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Пример 2. Докажите, что координаты точки пересечения медиан треугольника равны средним арифметическим координат вершин.

Решение. Пусть $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ — вершины треугольника, $M(x; y)$ — точка пересечения его медиан, $O(0; 0)$ — начало координат (рис. 55). Тогда $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, поэтому координаты вектора OM равны средним арифметическим координат векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, а так как координаты точек A, B, C и M равны соответственно координатам векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OM}$, то $x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ и $y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$.

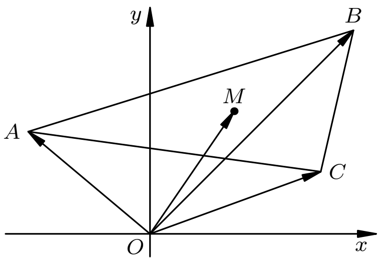


Рис. 55

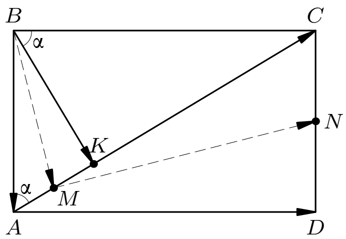


Рис. 56

Пример 3. В прямоугольнике $ABCD$ опущен перпендикуляр BK на диагональ AC (рис. 56). Точки M и N — середины отрезков AK и CD соответственно. Докажите, что угол BMN прямой.

Решение. Имеем:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{KC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{KC}), \quad \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BK}),$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{KC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BK}) = \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{BK}) = \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BK} - \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{AB}),\end{aligned}$$

так как $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{BK} = 0$.

Обозначим $\angle BAC = \angle KBC = \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BK} - \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{AB} &= BC \cdot BK \cdot \cos\alpha - KC \cdot AB \cdot \cos\alpha = \\ &= (BC \cdot BK - KC \cdot AB) \cdot \cos\alpha = \\ &= (BC \cdot KC \cdot \operatorname{ctg}\alpha - KC \cdot BC \cdot \operatorname{ctg}\alpha) \cdot \cos\alpha = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $BM \perp MN$.

Задачи первого уровня

2.399. Докажите, что для любых трех точек A, B и C верно равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.

2.400. Точки M и N — середины сторон соответственно AB и AC треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

2.401. Точки M и N — расположены соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, причем $AM : MB = AN : NC = 2 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CB}$.

2.402. Даны точки $A(1;-1)$, $B(-5;1)$, $C(3;2)$. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, а также координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ и их абсолютные величины.

2.403. Даны точки $A(-1;5)$, $B(2;8)$, $C(7;3)$ и $D(4;0)$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ и докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

2.404. Даны точки $A(-2;2)$, $B(3;3)$, $C(4;-2)$ и $D(-1;-3)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат.

2.405. Точка M — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

2.406⁰. Пусть M — середина отрезка AB, O — произвольная точка. Докажите, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

2.407. Точка M делит сторону BC треугольника ABC в отношении $BM : MC = 2 : 5$. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Найдите вектор $\overrightarrow{AM}$.

2.408. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ известно, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$. Найдите векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{FD}$ и $\overrightarrow{BM}$, где M — середина стороны EF.

2.409. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC. Докажите, что

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

2.410. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.

2.411. Пусть M_1, M_2, $\ldots$, M_6 — середины сторон выпуклого шестиугольника $A_1A_2\ldots A_6$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6.

2.412. Пусть точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB треугольника ABC. Докажите, что для любой точки O выполняется равенство

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

2.413$^{\mathbf{0}}$. Пусть M — середина отрезка AB, M_1 — середина отрезка A_1B_1. Докажите, что

$$\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1}).$$

2.414$^{\mathbf{0}}$. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, O — произвольная точка. Докажите, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

2.415. Дан треугольник ABC и точка M. Известно, что

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Докажите, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

2.416. Даны точки $A(-2;5)$, $B(4;3)$ и $C(1;-2)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

2.417. Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$, O — произвольная точка. Докажите, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

2.418$^{\mathbf{0}}$. Пусть M и N — точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR соответственно. Докажите , что

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR}).$$

2.419. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых O и O_1 — точки пересечения диагоналей. Докажите равенство

$$\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1}).$$

2.420. Две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD окружности с центром O пересекаются в точке M. Докажите, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

2.421. Даны точки $A(-3;0)$, $B(-2;5)$, $C(9;8)$ и $D(4;-4)$. Докажите, что диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны.

2.422. С помощью скалярного произведения докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

2.423. Даны точки $A(-8;-2)$, $B(-4;3)$ и $C(-1;-3)$. Точка D лежит на прямой $y = 4$, причем $AD \perp BC$. Найдите координаты точки D.

2.424. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно неравенство

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leqslant \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Задачи второго уровня

2.425. Точки K, L, M и N расположены соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD четырехугольника $ABCD$, причем $AK : KB = AN : ND = CL : LB = CM : MD$. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм.

2.426. На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы $ABKL$, $BCMN$ и $ACFG$. Докажите, что из отрезков KN, MF и GL можно составить треугольник.

2.427. Проведены четыре радиуса OA, OB, OC и OD окружности с центром O. Докажите, что если $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, то $ABCD$ — прямоугольник.

2.428. На поверхности стола отметили вершины остроугольного треугольника ABC. В точках A, B и C просверлили отверстия и продели через них нити. Нити связали над столом в один узел, а под столом к каждой из них привязали одинаковые грузы. В какой точке треугольника ABC расположится узел, если полученную систему отпустить?

2.429. На сторонах параллелограмма заданы точки, которые делят стороны в одном и том же отношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки деления служат вершинами параллелограмма, а центры этих параллелограммов совпадают.

2.430. На сторонах треугольника заданы точки, которые делят стороны в одном и том же отношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки пересечения медиан данного треугольника и треугольника, имеющего вершинами точки деления, совпадают.

2.431. Из произвольной точки M внутри равностороннего треугольника опущены перпендикуляры MK_1, MK_2, MK_3 на его стороны. Докажите, что

$$\overrightarrow{MK_1} + \overrightarrow{MK_2} + \overrightarrow{MK_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO},$$

где O — центр треугольника.

2.432. Точки M, K, N и L — середины сторон AB, BC, CD и DE пятиугольника $ABCDE$ (не обязательно выпуклого), P и Q — середины отрезков MN и KL. Докажите с помощью векторов, что отрезок PQ в четыре раза меньше стороны AE и параллелен ей.

2.433. Докажите, что при произвольном выборе точки O равенство

$$\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}, \quad \text{где } k \text{ — любое число,}$$

является необходимым и достаточным условием принадлежности различных точек A, B, C одной прямой.

2.434. На диагоналях AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ взяты точки M и N соответственно, такие, что $AM : AC = CN : CE = \lambda$. Известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой. Найдите λ.

2.435. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, O — центр описанной окружности. Докажите, что

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

2.436. Используя результат предыдущей задачи, докажите, что центр описанной окружности, точка пересечения медиан и точка пересечения высот (ортоцентр) треугольника лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*).

2.437. На стороне AB треугольника ABC с углом ABC, равным α, расположена точка K, причем $AK = BC$. Пусть P — середина BK, M — середина AC. Найдите угол APM.

2.438. Найдите координаты точки, лежащей на прямой $3x + 5y = 0$ и равноудаленной от точек $A(-5; -1)$ и $B(7; 7)$.

2.439. Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Докажите, что вектор $\vec{c}$ перпендикулярен вектору $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$.

2.440. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

2.441. Стороны треугольника равны a, b и c. Найдите медиану треугольника, проведенную к стороне, равной a.

2.442. На стороне BC треугольника ABC взята точка M, причем $BM : MC = 3 : 2$. Известно, что $BC = 15$, $AC = 10$, $AB = 8$. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и найдите длину отрезка AM.

2.443. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка M лежит на диагонали AC, причем $AM : MC = 3 : 1$. Докажите с помощью скалярного произведения векторов, что $\angle KMD = 90^\circ$.

2.444. На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $AMNB$ и $CKLA$. Докажите с помощью скалярного произведения векторов, что медиана AP треугольника ABC перпендикулярна прямой ML.

2.445. Пусть A, B, C, D — произвольные точки. Докажите, что

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

2.446. С помощью скалярного произведения векторов докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

2.447. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а точка H такова, что

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Докажите, что H — точка пересечения высот треугольника ABC.

2.448. (*Теорема Стюарта.*) Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC. Докажите с помощью скалярного произведения векторов, что

$$AB \cdot CD^2 = AD \cdot CB^2 + BD \cdot CA^2 - AD \cdot BD \cdot AB.$$

Задачи третьего уровня

2.449. Пусть O — центр правильного многоугольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$, X — произвольная точка плоскости. Докажите, что:

а) $\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$;

б) $\overrightarrow{XA_1}+\ldots+\overrightarrow{XA_n}=n\overrightarrow{XO}$.

2.450. Какую линию описывает середина отрезка между двумя пешеходами, равномерно идущими по прямым дорогам?

2.451. Четыре окружности радиуса R пересекаются по три в точках M и N, и по две в точках A, B, C и D. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

2.452. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Докажите, что:

а) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\frac{3}{2}$;

б) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\geqslant-\frac{3}{2}$.

Когда достигаются равенства?

§ 2.8. Площадь[1]

Равные многоугольники имеют равные площади.

Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.

Фигуры, имеющие равные площади, называются *равновеликими.*

[1] Все задачи этого параграфа могут быть решены без применения теоремы Пифагора.

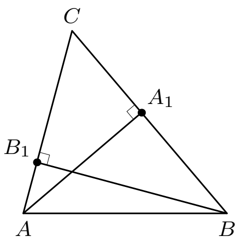


Рис. 57

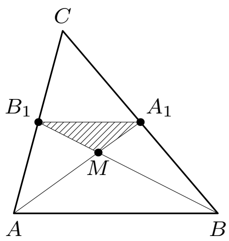


Рис. 58

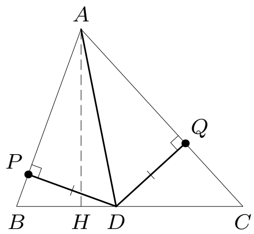


Рис. 59

Пример 1. Докажите, что в любом треугольнике высоты обратно пропорциональны сторонам, к которым они проведены.

Решение. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC (рис. 57). Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AA_1 = \frac{1}{2}AC \cdot BB_1$, откуда $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC}$.

Пример 2. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M (рис. 58). Найдите площадь треугольника A_1MB_1, если площадь треугольника ABC равна 1.

Решение. По теореме о медианах треугольника $AM = 2A_1M$, поэтому

$$S_{A_1MB_1} = \frac{1}{3}S_{AA_1B_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S_{AA_1C} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Пример 3. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Решение. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC (рис. 59). Нужно доказать, что $BD : DC = AB : AC$. Опустим перпендикуляры DP и DQ на стороны AB и AC соответственно. Поскольку любая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон, $DP = DQ$. Отношение площадей треугольников ADB и ADC равно отношению их сторон AB и AC, так как высоты DP и DQ, проведенные к эти сторонам, равны. С другой стороны, отношение площадей этих треугольников равно отношению их сторон BD и DC, так как высота AH, проведенная из вершины A, у них общая. Следовательно, $BD : DC = AB : AC$.

Задачи первого уровня

2.453. Площадь прямоугольника равна 24. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах сторон прямоугольника.

2.454⁰. Средняя линия треугольника разбивает его на треугольник и четырехугольник. Какую часть составляет площадь полученного треугольника от площади исходного?

2.455. Точка M расположена на стороне BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника AMD равна половине площади параллелограмма.

2.456⁰. Докажите, что медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.

2.457. Точки, делящие сторону треугольника на n равных частей, соединены отрезками с противоположной вершиной. Докажите, что при этом треугольник также разделился на n равновеликих частей.

2.458⁰. Пусть M — точка на стороне AB треугольника ABC, причем $AM : MB = m : n$. Докажите, что площадь треугольника CAM относится к площади треугольника CBM как $m : n$.

2.459. Докажите, что диагонали разбивают параллелограмм на четыре равновеликих треугольника.

2.460. Точки M и N — соответственно середины противоположных сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1. Найдите площадь четырехугольника, образованного пересечениями прямых AN, BN, CM и DM.

2.461⁰. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями равна половине произведения диагоналей.

2.462. Площадь трапеции, основания которой относятся как $3 : 2$, равна 35. Найдите площади треугольников, на которые трапеция разбивается диагональю.

2.463⁰. На сторонах AB и AC треугольника ABC, площадь которого равна 50, взяты соответственно точки M и K так, что $AM : MB = 1 : 5$, а $AK : KC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника AMK.

2.464. Точки M и N расположены на стороне BC

треугольника ABC, а точка K — на стороне AC, причем

$$BM : MN : NC = 1 : 1 : 2 \quad \text{и} \quad CK : AK = 1 : 4.$$

Известно, что площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь четырехугольника $AMNK$.

2.465. Вершины одного квадрата расположены на сторонах другого и делят эти стороны в отношении $1 : 2$, считая по часовой стрелке. Найдите отношение площадей квадратов.

2.466. Площадь треугольника ABC равна 1. Точки M и N — середины сторон AB и AC, а точка K лежит на стороне BC. Найдите площадь треугольника KMN.

2.467. Прямая, проведенная через вершину C трапеции $ABCD$ параллельно диагонали BD, пересекает продолжение основания AD в точке M. Докажите, что треугольник ACM равновелик трапеции $ABCD$.

2.468. Найдите площадь ромба со стороной, равной 8, и острым углом 30°.

2.469. Основания равнобокой трапеции равны a и b $(a > b)$, острый угол равен 45°. Найдите площадь трапеции.

2.470. Проекция диагонали равнобокой трапеции на ее большее основание равна a, боковая сторона равна b. Найдите площадь трапеции, если угол при ее меньшем основании равен 150°.

2.471. Медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке K. Найдите площадь треугольника BKN, если площадь треугольника ABC равна 24.

2.472$^{\mathbf{0}}$. Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих частей.

2.473. Медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке K. Докажите, что четырехугольник $AMKN$ равновелик треугольнику BKC.

2.474. Диагонали разбивают трапецию на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам трапеции, равновелики.

2.475. Диагонали четырехугольника разбивают его на четыре треугольника. Известно, что треугольники, прилежащие к двум противоположным сторонам четырехугольника, равновелики. Докажите, что данный четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

Задачи второго уровня

2.476. Точка внутри параллелограмма соединена со всеми его вершинами. Докажите, что суммы площадей треугольников, прилежащих к противоположным сторонам параллелограмма, равны между собой.

2.477. Докажите, что если диагональ какого-нибудь четырехугольника делит другую диагональ пополам, то она разбивает этот четырехугольник на две равновеликие части.

2.478. Середины сторон выпуклого четырехугольника последовательно соединены отрезками. Докажите, что площадь полученного четырехугольника вдвое меньше площади исходного.

2.479. Боковые стороны трапеции лежат на перпендикулярных прямых. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах диагоналей и серединах оснований, если боковые стороны равны a и b.

2.480$^{\mathbf{0}}$. Точки M и N принадлежат соответственно сторонам AB и AC треугольника ABC или их продолжениям, причем $AM : AB = m : n$, $AN : AC = p : q$. Докажите, что

$$S_{AMN} : S_{ABC} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}.$$

2.481. Стороны треугольника площади 1 разделены в отношении 3 : 1 по часовой стрелке. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках деления.

2.482. На продолжениях сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ соответственно за точки B, C, D и A отложены отрезки BB_1, CC_1, DD_1 и AA_1, равные этим сторонам. Найдите площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна s.

2.483. Данный параллелограмм разделите на три равновеликие части прямыми, выходящими из одной вершины.

2.484. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, взаимно перпендикулярны и равны 2 и 7. Найдите площадь четырехугольника.

2.485. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равны между собой. Найдите площадь четырехугольника, если его диагонали равны 8 и 12.

2.486. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри равностороннего треугольника до его сторон всегда одна и та же.

2.487. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки на основании равнобедренного треугольника до его боковых сторон всегда одна и та же.

2.488. Стороны AB и AC треугольника ABC равны соответственно a и b. На медиане, проведенной к стороне BC, взята точка M. Сумма расстояний от этой точки до прямых AB и AC равна c. Найдите эти расстояния.

2.489$^{\mathbf{0}}$. Докажите, что площадь треугольника равна произведению полупериметра треугольника и радиуса вписанной окружности.

2.490. Докажите теорему Пифагора, используя результат предыдущей задачи.

2.491. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые гипотенуза делится точкой касания со вписанной окружностью.

2.492. Окружность с центром на гипотенузе прямоугольного треугольника касается катетов. Найдите радиус окружности, если катеты равны a и b.

2.493$^{\mathbf{0}}$. Окружность касается стороны треугольника, равной a, и продолжения двух других сторон. Докажите, что радиус окружности равен площади треугольника, деленной на разность между полупериметром и стороной a.

2.494. Найдите площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной c, и острым углом 15°.

2.495. Точки K, L, M и N — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1. Найдите площадь параллелограмма, образованного пересечениями прямых AL, BM, CN и DK.

2.496. Произвольный четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника; площади трех из них равны 10, 20 и 30, и каждая меньше площади четвертого треугольника. Найдите площадь данного четырехугольника.

2.497. Боковая сторона AB и основание BC трапеции $ABCD$ вдвое меньше ее основания AD. Найдите площадь трапеции, если $AC = a$, $CD = b$.

2.498. В треугольнике ABC угол A равен $45°$, а угол C острый. Из середины стороны BC опущен перпендикуляр NM на сторону AC. Площади треугольников NMC и ABC относятся как $1 : 8$. Найдите углы треугольника ABC.

2.499. Каждая сторона треугольника больше 100. Может ли его площадь быть меньше 0,01?

2.500. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место таких точек M, для которых:

а) треугольники AMB и ABC равновелики;

б) треугольники AMB и AMC равновелики;

в) треугольники AMB, AMC и BMC равновелики.

2.501. Точки K и L лежат на стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$, а точки M и N на стороне AD, причем $BK = KL = LC$ и $AN = NM = MD$. Докажите, что площадь треугольника KNL равна полусумме площадей треугольников ABK и CML.

2.502. Две прямые делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на три равные части и не пересекаются внутри четырехугольника. Докажите, что между этими прямыми заключена треть площади четырехугольника.

2.503. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, площадь которого равна 25, проведены диагонали. Известно, что площадь треугольника ABC вдвое больше площади треугольника ABD, а площадь треугольника BCD втрое больше площади треугольника ADC. Найдите площади треугольников ABC, ABD, ACD и BCD.

2.504. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, разделил его на два четырехугольника, имеющих равные площади. Докажите, что эти стороны параллельны.

2.505. Пусть P — середина стороны AB выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если площадь треугольника

PDC равна половине площади четырехугольника $ABCD$, то стороны BC и AD параллельны.

2.506. Середина каждой стороны параллелограмма соединена с концами противоположной стороны. Найдите площадь восьмиугольника, образованного пересечениями проведенных отрезков, если площадь параллелограмма равна 1.

Задачи третьего уровня

2.507. В квадрате со стороной 1 произвольно берут 101 точку (не обязательно внутри квадрата, возможно, часть на сторонах), причем никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше $\frac{1}{100}$.

2.508. Дан угол XAY и точка O внутри него. Проведите через точку O прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшей площади.

2.509. Найдите геометрическое место точек X, лежащих внутри трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) или на ее сторонах, если известно, что $S_{XAB} = S_{XCD}$.

2.510. Пусть M и N — середины противоположных сторон BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$, отрезки AM и BN пересекаются в точке P, а отрезки DM и CN — в точке Q. Докажите, что сумма площадей треугольников APB и CQD равна площади четырехугольника $MPNQ$.

2.511. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.

2.512. Три прямые, параллельные сторонам треугольника ABC и проходящие через одну точку, отсекают от треугольника ABC трапеции. Три диагонали этих трапеций, не имеющие общих концов, делят треугольник на семь частей, из которых четыре — треугольники. Докажите, что сумма площадей трех из этих треугольников, прилегающих к сторонам треугольника ABC, равна площади четвертого.

2.513. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

§ 2.9. Подобные треугольники

Два треугольника называются *подобными*, если их углы соответственно равны, а соответствующие стороны пропорциональны, т. е.

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \iff$$
$$\iff \angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1,\ \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Отношение соответствующих сторон подобных треугольников называется *коэффициентом подобия.*

Теорема. *Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.*

Признаки подобия треугольников. *Два треугольника подобны, если*:

1. *Два угла одного из них соответственно равны двум углам другого.*

2. *Две стороны одного из них соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы между этими сторонами равны.*

3. *Три стороны одного из них соответственно пропорциональны трем сторонам другого.*

Обобщенная теорема Фалеса. *Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.*

Пример 1. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и AB втрое больше A_1B_1. Найдите медиану A_1M_1 треугольника $A_1B_1C_1$, если медиана AM треугольника ABC равна 12.

Решение. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по двум углам (рис. 60). Поскольку $\frac{AB}{A_1B_1} = 3$, коэффициент подобия

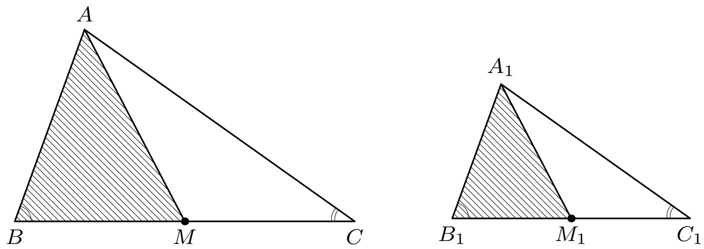


Рис. 60

равен 3. Поэтому $\dfrac{BM}{B_1M_1} = \left(\frac{1}{2}BC\right)/\left(\frac{1}{2}B_1C_1\right)$. Значит, треугольник ABM подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ по второму признаку подобия треугольников, причем коэффициент подобия также равен 3. Следовательно, $AM = 3 \cdot A_1M_1$, откуда $A_1M_1 = \frac{1}{3}AM = 4$.

Пример 2. Прямая, параллельная основаниям трапеции, делит ее на две равновеликие трапеции. Найдите отрезок этой прямой, заключенный внутри трапеции, если основания равны a и b.

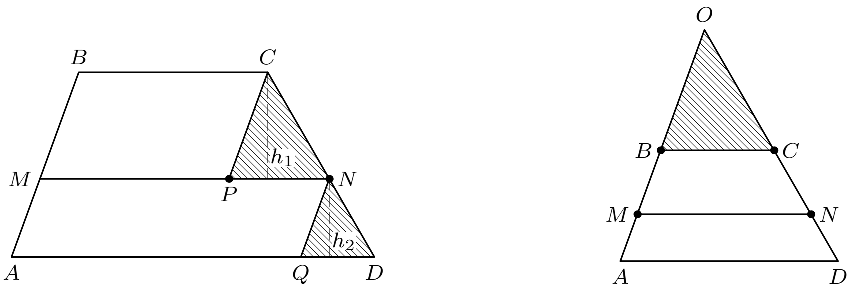
Решение. *Первый способ.* Пусть точки M и N находятся на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, P — точка пересечения с MN прямой, проходящей через точку C параллельно AB, Q — точка пересечения с AD прямой, проходящей через точку N параллельно AB (рис. 61, a). Обозначим $MN = x$; h_1 и h_2 — высоты подобных треугольников PCN и QND. Если $BC = a$ и $AD = b$ $(b > a)$, то

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+a)h_1 = \dfrac{1}{2}(b+x)h_2, \\ \dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{x-a}{b-x}. \end{cases}$$

Поэтому $\frac{b+x}{x+a} = \frac{x-a}{b-x}$. Отсюда находим, что $x^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$.

Второй способ. Пусть O — точка пересечения продолжений боковых сторон AB и DC, S — площадь треугольника BOC, $MN = x$ — искомый отрезок, $BC = a$ и $AD = b$ $(b > a)$ (рис. 61, *б*). Тогда $S_{MNO} - S = S_{AOD} - S_{MNO}$, или

$$\frac{x^2}{a^2} \cdot S - S = \frac{b^2}{a^2} \cdot S - \frac{x^2}{a^2} \cdot S.$$



а) *б)*

Рис. 61

Отсюда находим, что $x^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$.

Ответ. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Пример 3. Точки K и N расположены соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, причем $AK = BK$ и $AN = 2NC$. В каком отношении отрезок KN делит медиану AM треугольника ABC?

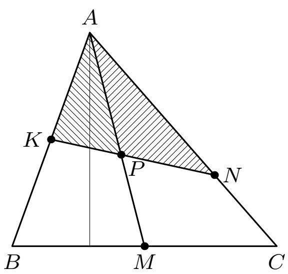


Рис. 62

Решение. Пусть прямые AM и KN пересекаются в точке P (рис. 62). Обозначим через S площадь треугольника ABC, а через k — отношение $\frac{AP}{AM}$. Тогда

$$S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{1}{2}S,$$

$$S_{AKN} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot S = \frac{1}{3}S,$$

$$S_{AKP} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{AP}{AM} \cdot S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{1}{2}S = \frac{1}{4}kS,$$

$$S_{ANP} = \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AM} \cdot S_{ACM} = \frac{2}{3} \cdot k \cdot \frac{1}{2}S = \frac{1}{3}kS.$$

Поскольку $S_{AKN} = S_{AKP} + S_{ANP}$, получим уравнение

$$\frac{1}{3}S = \frac{1}{4}kS + \frac{1}{3}kS,$$

откуда $k = \frac{4}{7}$. Следовательно, $AP : PN = 4 : 3$.

Задачи первого уровня

2.514. Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

2.515. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит треугольник на два подобных треугольника.

2.516⁰. Докажите, что прямая, параллельная стороне данного треугольника и пересекающая две другие его стороны (или их продолжения), образует с этими сторонами треугольник, подобный данному.

2.517⁰. Сторона AB треугольника ABC разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне BC. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, если $BC = 12$.

2.518. На стороне AC треугольника ABC отложен отрезок AM, равный третьей части стороны AB, а на стороне AB — отрезок AN, равный третьей части стороны AC. Найдите MN, если $BC = 15$.

2.519. Через точку L на стороне BC треугольника ABC поведены прямые, параллельные сторонам AB и AC и пересекающие эти стороны соответственно в точках K и M. Известно, что $BL : LC = 1 : 3$, $AB = 12$ и $AC = 18$. Найдите стороны четырехугольника $AKLM$.

2.520⁰. Каждая из сторон AB и AC треугольника ABC разделена соответственно точками M и N в отношении 2:3, считая от точки A. Докажите, что $MN \parallel BC$, и найдите MN, если $BC = 20$.

2.521⁰. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOD и COB подобны, и найдите коэффициент подобия, если $AD = a$ и $BC = b$.

2.522. Точка M — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Найдите отношение, в котором отрезок AM делит диагональ BD.

2.523. Точка K лежит на диагонали BD параллелограмма $ABCD$, причем $BK : KD = 1 : 4$. В каком отношении прямая AK делит сторону BC?

2.524. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ разделена на n равных частей. Первая точка деления P соединена с вершиной B. Докажите, что прямая BP отсекает на диагонали AC часть AQ, которая равна $\frac{1}{n+1}$ всей диагонали.

2.525. Точка M лежит на боковой стороне AB трапеции $ABCD$, причем $AM : MB = 1 : 2$. Прямая, проходящая через точку M параллельно основаниям AD и BC, пересекает боковую сторону CD в точке N. Найдите MN, если $AD = a$ и $BC = b$.

2.526$^{\mathbf{0}}$. Боковая сторона трапеции разделена на пять равных частей, и через третью точку деления (считая от конца меньшего основания) проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите отрезок прямой, заключенный между сторонами трапеции, если основания трапеции равны a и b и $a > b$.

2.527. Основание треугольника равно 36. Прямая, параллельная основанию, делит треугольник на две равновеликие части. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами треугольника.

2.528. Через точки, делящие сторону треугольника на три равные части, проведены прямые, параллельные другой стороне треугольника. Найдите площадь четырехугольника, заключенного между этими прямыми, если площадь треугольника равна 24.

2.529. Точка M лежит на боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC, причем $BM = BC$. Найдите MC, если $BC = 1$ и $AB = 2$.

2.530$^{\mathbf{0}}$. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на n равных частей.

2.531. В треугольнике ABC точка K на медиане AM расположена так, что $AK : KM = 1 : 3$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне AC, делит сторону BC.

2.532. В прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 8, вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите сторону квадрата.

2.533. Постройте прямоугольный треугольник по отношению его катетов и высоте, опущенной на гипотенузу.

2.534. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов.

2.535⁰. Каждая из боковых сторон трапеции разделена на 5 равных частей. Пусть M и N — вторые точки деления на боковых сторонах, считая от концов меньшего основания. Найдите MN, если основания трапеции равны a и b, $a > b$.

2.536⁰. Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны соответственно a и b. Диагональ AC разделена на три равные части и через ближайшую к A точку деления M проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите отрезок этой прямой, заключенный между диагоналями.

2.537⁰. На диагоналях AC и BD трапеции $ABCD$ взяты соответственно точки M и N, причем $AM : MC = DN : NB = 1 : 4$. Найдите MN, если основания AD и BC равны соответственно a и b $(a > b)$.

2.538. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна 28, пересекаются в точке O. Через середины отрезков BO и DO проведены прямые, параллельные диагонали AC. Найдите площадь части четырехугольника, заключенной между этими прямыми.

2.539⁰. Докажите, что медиана AM треугольника ABC делит пополам любой отрезок с концами на AB и AC, параллельный стороне BC.

Задачи второго уровня

2.540⁰. (*Замечательное свойство трапеции.*) Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований любой трапеции лежат на одной прямой.

2.541⁰. Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключенный внутри трапеции, разбивается ее диагоналями на три части. Докажите, что отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.

2.542⁰. Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям.

Найдите отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции.

2.543. Параллельно основаниям трапеции проведите прямую, отрезок которой, заключенный внутри трапеции, делился бы ее диагоналями на три равные части.

2.544. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой, ограниченного продолжениями диагоналей, если длины оснований трапеции равны a и b.

2.545. а^0) Даны отрезки a, b и c. Постройте такой отрезок x, что $x : a = b : c$.

б) Даны отрезки a, b, c, d и e. Постройте отрезок, равный $\frac{abc}{de}$.

2.546. Дан угол и точка внутри него. Проведите через эту точку прямую, отрезок которой, заключенный внутри данного угла, делился бы данной точкой в заданном отношении.

2.547. Диагонали выпуклого четырехугольника равны 12 и 18 и пересекаются в точке O. Найдите стороны четырехугольника с вершинами в точках пересечения медиан треугольников AOB, BOC, COD и AOD.

2.548^0. AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что треугольник AA_1C подобен треугольнику BB_1C, а треугольник ABC подобен треугольнику A_1B_1C.

2.549. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Найдите B_1C_1, если $\angle A = 60^\circ$ и $BC = 6$.

2.550. Пусть M и N — проекции вершины A параллелограмма $ABCD$ на прямые BC и CD соответственно. Докажите, что треугольник MAN подобен треугольнику ABC.

2.551. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найдите площадь четырехугольника $OMCD$.

2.552. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N так, что прямые MC и NC делят параллелограмм на три равновеликие части. Найдите MN, если $BD = d$.

2.553. Дан выпуклый четырехугольник площади S. Внутри него выбирается точка и отображается симметрично относительно середин его сторон. Получаются четыре вершины нового четырехугольника. Найдите его площадь.

2.554. Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из боковых сторон на три равные части. Вся трапеция разделена ими на три части. Найдите площадь средней части, если площади крайних S_1 и S_2.

2.555⁰. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и ее основаниями, равны S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

2.556. Площадь трапеции равна 27, основания 8 и 16. Найдите площади треугольников, на которые трапеция разделена диагоналями.

2.557. Треугольник и вписанный в него ромб имеют общий угол. Стороны треугольника, заключающие этот угол, относятся как $m : n$. Найдите отношение площади ромба к площади треугольника.

2.558. Точка M лежит на стороне BC треугольника ABC, причем $\angle MAB = \angle ACB$. Найдите AM, если $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

2.559. В треугольник ABC вписан ромб $DECF$ так, что вершина E лежит на отрезке BC, вершина F лежит на отрезке AC и вершина D лежит на отрезке AB. Найдите сторону ромба, если $BC = 12$, $AC = 6$.

2.560. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части. Рассмотрим шестиугольник с вершинами в точках деления. Докажите, что три его диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

2.561. Каждая сторона выпуклого четырехугольника разделена на три равные части. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены отрезками. Докажите, что эти отрезки делят друг друга на три равные части.

2.562⁰. Площадь треугольника ABC равна S. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC.

2.563. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят каждую боковую сторону на отрезки длиной m и n, считая от вершины. К окружности проведены три касательные, параллельные каждой из сторон треугольника. Найдите длины отрезков касательных, заключенных между сторонами треугольника.

2.564⁰. Точки K и M лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC, причем $AK : BK = 3 : 2$, $BM : MC = 3 : 1$. Через точку B проведена прямая l, параллельная AC. Прямая KM пересекает прямую l в точке P, а прямую AC в точке N. Найдите BP и CN, если $AC = a$.

2.565. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $CN = AC$. Точка K — середина стороны AB. В каком отношении прямая KN делит сторону BC?

2.566. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $CN = 3AC$. Точка K лежит на стороне AB, причем $AK : KB = 1 : 3$. В каком отношении прямая KN делит сторону BC?

2.567. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $AC = 2CN$. Точка M лежит на стороне BC, причем $BM : MC = 1 : 3$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB?

2.568. Точки K и M лежат на сторонах соответственно AB и BC треугольника ABC, причем $BK : KA = 1 : 4$, $BM : MC = 3 : 2$. Прямая MK пересекает продолжение стороны AC в точке N. Найдите $AC : CN$.

2.569⁰. Точки M и N лежат на сторонах соответственно AB и AD параллелограмма $ABCD$, причем $AM : MB = 1 : 2$, $AN : ND = 3 : 2$. Отрезки DM и CN пересекаются в точке K. Найдите отношения $DK : KM$, $CK : KN$.

2.570. Точка P лежит на стороне AB треугольника ABC, причем $AP : PB = 1 : 2$. Отрезок CP пересекает медиану AD в точке M. Найдите отношения $AM : MD$, $CM : MP$.

2.571⁰. Точки K и E лежат соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC. Отрезки AK и CE пересекаются в точке M. В каком отношении прямая BM делит сторону AC, если $BK : KC = 1 : 2$, $AE : EB = 2 : 3$?

2.572. На медиане AD треугольника ABC взята точка M, причем $AM : MD = 1 : 3$. В каком отношении прямая BM делит сторону AC?

2.573⁰. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

2.574. Биссектриса внешнего угла A треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC и точке M. Докажите, что $BM : MC = AB : AC$.

2.575⁰. На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что $BD : AB = DC : AC$. Докажите, что AD — биссектриса треугольника ABC.

2.576. В треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. В каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису треугольника, проведенную из вершины C?

2.577. В треугольнике ABC сторона AC равна b, сторона AB равна c, а биссектриса A пересекается со стороной BC в точке D, такой, что $DA = DB$. Найдите сторону BC.

2.578. Прямая, параллельная основаниям трапеции, делит ее на две трапеции, площади которых относятся как $1 : 2$. Найдите отрезок этой прямой, заключенный внутри трапеции, если основания равны a и b.

2.579⁰. Около окружности описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции равна a, отрезок, соединяющий точки касания боковых сторон с окружностью, равен b. Найдите диаметр окружности.

2.580. Периметр треугольника ABC равен 8. В треугольник вписана окружность и к ней проведена касательная, параллельная стороне AB. Отрезок этой касательной, заключенный между сторонами AC и CB, равен 1. Найдите сторону AB.

2.581. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найдите площадь данного треугольника.

2.582. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части. Точки деления служат вершинами двух треугольников, пересечение которых — шестиугольник. Найдите площадь этого шестиугольника, если площадь данного треугольника равна S.

2.583. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 12$ и $BC = 8$. На продолжении стороны BC выбрана такая точка M, что $CM = 2{,}4$. В каком отношении прямая AM делит площадь трапеции $ABCD$?

2.584$^{\mathbf{0}}$. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = 2.$$

Найдите площадь треугольника, вершины которого — попарные пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1, если площадь треугольника ABC равна 1.

2.585. На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ взяты точки соответственно M, N, K и L, причем $AM : MB = CK : KD = 1 : 2$, а $BN : NC = DL : LA = 1 : 3$. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого — пересечения отрезков AN, BK, CL и DM, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.

2.586. Через точку K, данную на стороне AB треугольника ABC, проведите прямую так, чтобы она разделила треугольник ABC на две равновеликие части.

2.587. В треугольнике со сторонами a, b и c проведены биссектрисы, точки пересечения которых с противолежащими сторонами являются вершинами второго треугольника. Докажите, что отношение площадей этих треугольников равно $\frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}$.

2.588. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Известно, что площадь треугольника DEF равна 5. Найдите площадь треугольника ABC.

2.589. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что площадь треугольника ODC (O — точка пересечения диагоналей) есть среднее пропорциональное между площадями треугольников BOC и AOD. Докажите, что $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

2.590. Даны две параллельные прямые l и l_1. С помощью одной линейки разделите пополам отрезок, расположенный на одной из них.

2.591. Даны две параллельные прямые l и l_1. С помощью одной линейки проведите через данную точку M прямую, параллельную прямым l и l_1.

Задачи третьего уровня

2.592. Равны ли треугольники по двум сторонам и трем углам?

2.593. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь всего четырехугольника не превосходит 4, $AD = 3$. Найдите сторону BC.

2.594. На сторонах AB, AC и BC правильного треугольника ABC расположены точки соответственно C_1, B_1 и A_1, причем треугольник $A_1B_1C_1$ является правильным. Отрезок BB_1 пересекает сторону C_1A_1 в точке O, причем $\frac{BO}{OB_1} = k$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$.

§ 2.10. Вписанный угол

Теорема о вписанном угле. *Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*

Пример 1. Точки A, B и C лежат на окружности. Биссектриса угла BAC пересекает эту окружность в точке M. Найдите углы треугольника BMC, если известно, что $\angle BAC = 80°$.

Решение. Вписанные углы CBM и CAM опираются на одну дугу (рис. 63), поэтому

$$\angle CBM = \angle CAM = \frac{1}{2}\angle BAC = 40°.$$

Аналогично, $\angle BCM = \angle BAM = 40°$. Тогда $\angle BMC = 180° - 40° - 40° = 100°$.

Ответ. 40°, 40°, 100°.

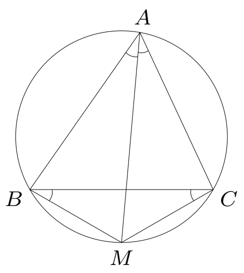


Рис. 63

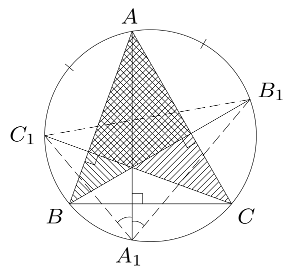


Рис. 64

Пример 2. Продолжения высот остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1, CC_1.

Решение. Дуги AC_1 и AB_1 (рис. 64) равны, так как на них опираются равные вписанные углы ACC_1 и ABB_1 (каждый из них в сумме с углом BAC составляет 90°). Следовательно, $\angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1$, т. е. луч A_1A — биссектриса угла $C_1A_1B_1$. Аналогично для остальных лучей B_1B и C_1C.

Пример 3. (*Задача Архимеда.*) В дугу AB окружности вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM > MB$). Докажите, что основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам, т. е. $AH = HM + MB$.

Решение. *Первый способ.* Отложим на продолжении отрезка AM за точку M отрезок MB_1, равный MB (рис. 65, *а*). Пусть прямая KM пересекает отрезок BB_1 в точке P. Тогда

$$\angle BMB_1 = \angle MAB + \angle MBA = \frac{1}{2}(\smile MB + \smile MA) = \\ = \frac{1}{2}\smile AKB = \smile AK = 2\angle KMA = 2\angle B_1MP.$$

Поэтому прямая KP делит угол BMB_1 равнобедренного треугольника BMB_1 пополам. Тогда KP — серединный перпендикуляр к отрезку BB_1, $KB_1 = KB = AK$. Поэтому KH — высота и медиана равнобедренного треугольника AKB_1. Следовательно, $AH = HB_1 = HM + MB_1 = HM + MB$.

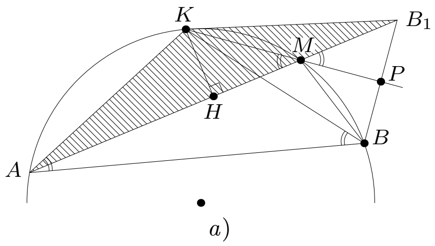


Рис. 65

Второй способ. На луче AM отложим отрезок AF, равный BM (рис. 65, *б*). Тогда треугольники AKF и BKM равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $KF = KM$. Поэтому высота KH равнобедренного треугольника FKM делит основание FM пополам. Пусть точка F лежит между A и H. Тогда $AH = AF + FH = BM + HM$. Аналогично для случая, когда точка H лежит между A и F.

Задачи первого уровня

2.595. Точки A, B и C делят окружность на три дуги, угловые величины которых относятся как $1 : 2 : 3$. Найдите углы треугольника ABC.

2.596. Точки A, B и C расположены на окружности с центром O. Хорды AB, BC и AC соответственно видны из точки O под углами: а) $110°$, $120°$ и $130°$; б) $150°$, $40°$ и $110°$. Найдите углы треугольника ABC.

2.597. Окружность описана около равностороннего треугольника ABC. На дуге BC, не содержащей точку A, расположена точка M, делящая эту дугу в отношении $1 : 2$. Найдите углы треугольника ABM.

2.598. Продолжение высоты CD, опущенной из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC, делит дугу AB описанной окружности на дуги, одна из которых на $40°$ больше другой. Найдите острые углы треугольника.

2.599. Окружность радиуса 4 делится точками A, B и C на дуги, угловые величины которых относятся как $1 : 2 : 3$. Найдите стороны треугольника ABC.

2.600. Точки A, B, C и D последовательно расположены на окружности. Известно, что угловые величины меньших дуг AB, BC, CD и DA относятся как $1 : 3 : 5 : 6$. Найдите углы четырехугольника $ABCD$.

2.601⁰. Докажите, что равные вписанные углы одной окружности опираются на равные хорды. Верно ли обратное?

2.602. Точки A, B и C расположены на окружности. Биссектриса угла BAC пересекает окружность в точке M. Докажите, что треугольник BMC — равнобедренный.

2.603⁰. Докажите, что трапеция, вписанная в окружность,— равнобокая.

2.604. Найдите углы трапеции, если известно, что ее меньшее основание равно одной из боковых сторон, а вершины лежат на окружности с центром на большей стороне.

2.605⁰. Докажите, что у четырехугольника, вписанного в окружность, сумма противоположных углов равна $180°$.

2.606⁰. Докажите, что угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.

2.607. Окружность касается сторон угла с вершиной A в точках B и C. Найдите угловые величины дуг, на которые окружность делится точками B и C, если $\angle BAC = 70°$.

2.608⁰. Угловые величины противоположных дуг, высекаемых на окружности пересекающимися хордами, равны α и β. Найдите угол между хордами.

2.609⁰. Угловые величины дуг, заключенных между двумя хордами, продолжения которых пересекаются вне круга, равны α и β ($\alpha > \beta$). Под каким углом пересекаются продолжения хорд?

Задачи второго уровня

2.610. Рассмотрим четыре сегмента, отсекаемых от окружности вписанным в нее четырехугольником и расположенных вне этого четырехугольника. Найдите сумму углов, вписанных в эти сегменты.

2.611. Трапеция с высотой h вписана в окружность. Боковая сторона видна из центра окружности под углом $120°$. Найдите среднюю линию трапеции.

2.612. В круге провели три хорды AB, BC, CD и отметили их середины M, N, K. Докажите, что $\angle BMN = \angle NKC$ или $\angle BMN + \angle NKC = 180^\circ$.

2.613⁰. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$.

2.614. Из точки P, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры PC_1 и PB_1 на прямые AB и AC. Докажите, что $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

2.615. Внутри угла с вершиной O взята некоторая точка M. Луч OM образует со сторонами угла углы, один из которого больше другого на 10°; A и B — проекции точки M на стороны угла. Найдите угол между прямыми AB и OM.

2.616. Точка M симметрична вершине C прямоугольного треугольника ABC относительно прямой, проходящей через вершину B прямого угла и середину гипотенузы AC. Найдите угол AMB, если известно, что $\angle CAB = \alpha$ ($\alpha < 45^\circ$).

2.617. Три прямые, проходящие через точку O, образуют друг с другом углы в 60°. Докажите, что проекции произвольной точки, отличной от O, на эти прямые являются вершинами правильного треугольника.

2.618. Даны диаметр AB, перпендикулярная ему хорда CD и точка M окружности, отличная от точек C и D. Докажите, что лучи MA и MB делят пополам углы, образованные пересечением прямых MC и MD.

2.619. Две окружности пересекаются в точках A и B. Продолжения хорд AC и BD первой окружности пересекают вторую окружность в точках E и F. Докажите, что прямые CD и EF параллельны.

2.620. Точки A, B, C, D лежат на окружности. Точки M, N, K, L — середины дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $MK \perp NL$.

2.621. На одной из сторон острого угла расположен отрезок AB. Рассмотрим всевозможные углы, под которыми отрезок AB виден из точек, лежащих на второй стороне угла. Докажите, что вершина наибольшего из этих углов — это точка касания окружности, проходящей через точки A и B, со второй стороной угла.

2.622. Продолжения противоположных сторон AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а сторон AD и BC — в точке N. Докажите, что биссектрисы углов AMD и DNC взаимно перпендикулярны.

2.623⁰. Прямая, проходящая через точку A и центр O вписанной окружности треугольника ABC, вторично пересекает описанную окружность этого треугольника в точке M. Докажите, что треугольники BOM и COM равнобедренные.

2.624. Продолжения биссектрис остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1, CC_1.

2.625. К двум окружностям, пересекающимся в точках K и M, проведена общая касательная. Докажите, что если A и B — точки касания, то $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$.

2.626. Две прямые, касающиеся данной окружности в точках A и B, пересекаются в точке C. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на данной окружности.

2.627. Через вершину C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена касательная к описанной окружности этого треугольника. Расстояния от вершин A и B до касательной равны a и b. Найдите катеты треугольника ABC.

2.628. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E; AD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE = ED$.

2.629. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку K первой окружности проводятся прямые KA и KB, пересекающие вторую окружность в точках P и Q. Докажите, что хорда PQ второй окружности перпендикулярна диаметру KM первой окружности.

2.630⁰. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M. Докажите, что прямая, проходящая через точку M и середину стороны AD, перпендикулярна BC.

2.631. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE, пересекающиеся в точке O. Известно, что $OE = 1$, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки E, D и O. Найдите стороны и углы треугольника EDO.

2.632$^{\mathbf{0}}$. Докажите, что около четырехугольника, сумма противоположных углов которого равна $180°$, можно описать окружность.

2.633. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проводится прямая, пересекающая окружности в точках C и D, а затем через точки C и D проводятся касательные к этим окружностям. Докажите, что точки A, C, D и точка P пересечения касательных лежат на одной окружности.

2.634$^{\mathbf{0}}$. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

2.635. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle BCD = 80°$, $\angle ACB = 50°$ и $\angle ABD = 30°$. Найдите $\angle ADB$.

2.636. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ACB = 25°$, $\angle ACD = 40°$ и $\angle BAD = 115°$. Найдите $\angle ADB$.

2.637. Даны четыре окружности, каждая из которых внешним образом касается двух из трех остальных. Докажите, что через точки касания можно провести окружность.

2.638. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.

2.639. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и радиусу вписанной окружности.

2.640. Точка E лежит на стороне AC правильного треугольника ABC; точка K — середина отрезка AE. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно прямой AB, и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно прямой BC, пересекаются в точке D. Найдите углы треугольника BKD.

2.641. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, $\angle AOC = 60°$. Найдите угол AMC, где M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

2.642. Угол при вершине A треугольника ABC равен $60°$. Биссектрисы BD и CE пересекаются в точке M. Докажите, что $MD = ME$.

2.643. A и B — фиксированные точки окружности, C —

произвольная точка окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения: а) биссектрис; б) высот треугольника ABC.

2.644$^{\mathbf{0}}$. Докажите, что точка, симметричная точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника относительно стороны, лежит на описанной окружности этого треугольника.

2.645$^{\mathbf{0}}$. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, AH — высота. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

2.646. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, O — центр его описанной окружности. Докажите, что $CO \perp A_1B_1$.

2.647. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол ADB в два раза меньше угла ACB, $BC = AC = 5$, $AD = 6$. Найдите площадь трапеции.

2.648. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C, пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Известно, что $BC = 1$. Найдите EF.

2.649. Сторона AD вписанного четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной окружности, M — точка пересечения диагоналей, P — проекция точки M на AD. Докажите, что M — центр окружности, вписанной в треугольник BCP.

2.650. Вершины чертежного угольника скользят по сторонам прямого угла. Найдите траекторию вершины прямого угла угольника.

2.651$^{\mathbf{0}}$. В треугольнике ABC стороны AC и BC не равны. Докажите, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из вершины C, тогда и только тогда, когда $\angle C = 90^\circ$.

2.652. Постройте треугольник по точкам пересечения с описанной окружностью продолжений его высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из одной вершины.

2.653. Треугольник с вершинами в основаниях высот треугольника ABC называется *ортотреугольником* треугольника ABC. Докажите, что высоты остроугольного треугольника ABC являются биссектрисами его ортотреугольника.

2.654. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, образуют прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 10. Найдите радиус окружности, описанной около исходного треугольника.

2.655. Расстояние от точки пересечения высот треугольника ABC до вершины C равно стороне AB. Найдите угол ACB.

2.656. Расстояние от точки пересечения высот треугольника ABC до вершины C равно радиусу описанной окружности этого треугольника. Найдите угол ACB.

2.657. Из точки A проведены к окружности две касательные AP и AQ (P и Q — точки касания) и секущая AKL (точка K между A и L). Пусть M — середина отрезка KL. Докажите, что $\angle AMP = \angle AMQ$.

2.658$^{\mathbf{0}}$. Три окружности равных радиусов проходят через точку M и попарно пересекаются в трех других точках A, B и C. Докажите, что точки A, B и C лежат на окружности того же радиуса, а M — точка пересечения высот треугольника ABC.

Задачи третьего уровня

2.659. Окружность S_2 проходит через центр O окружности S_1 и пересекает ее в точках A и B. Через точку A проведена касательная к окружности S_2; D — вторая точка пересечения этой касательной с окружностью S_1. Докажите, что $AD = AB$.

2.660. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и P. Через точку A проведена касательная AB к окружности S_1, а через точку P — прямая CD, параллельная прямой AB (точки B и C лежат на S_2, точка D — на S_1). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

2.661. В треугольнике ABC стороны CB и CA равны соответственно a и b. Биссектриса угла ACB пересекает сторону AB в точке K, а описанную около треугольника ABC окружность — в точке M. Окружность, описанная около треугольника AMK, вторично пересекает прямую CA в точке P. Найдите AP.

2.662. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Пусть AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T. Докажите, что MT — биссектриса угла AMB.

2.663. Точки касания вписанной в данный треугольник окружности соединены отрезками и в полученном треугольнике проведены высоты. Докажите, что прямые, соединяющие основания этих высот, параллельны сторонам исходного треугольника.

2.664. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD. Точка M на диагонали AC такова, что около четырехугольника $BCDM$ можно описать окружность. Докажите, что BD — общая касательная окружностей, описанных около треугольников ABM и ADM.

2.665. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника (или их продолжения), лежат на одной прямой (*прямая Симсона*).

2.666. Окружность S_1 касается сторон угла ABC в точках A и C. Окружность S_2 касается прямой AC в точке C и проходит через точку B. Окружность S_1 она пересекает в точке M. Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

2.667. К двум окружностям различного радиуса проведены общие внешние касательные AD и BC. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ описанный тогда и только тогда, когда окружности касаются.

Раздел третий
9 класс

§ 3.1. Пропорциональные отрезки в круге

Теорема. *Произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.*

Доказательство. Пусть хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M (рис. 66). Треугольники AMC и DMB подобны по двум углам (углы BAC и BDC равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу), поэтому $\frac{AM}{DM} = \frac{CM}{BM}$, откуда $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

Теорема о касательной и секущей. *Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.*

Доказательство. Пусть через точку M (рис. 67), лежащую вне окружности, проходят две прямые: одна из них касается окружности в точке A, а вторая пересекает эту окружность в точках B и C, причем точка B лежит между точками M и C. Требуется доказать, что $BM \cdot CM = AM^2$.

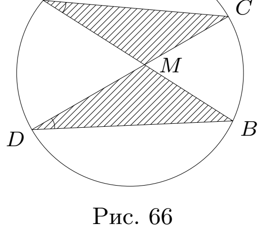


Рис. 66

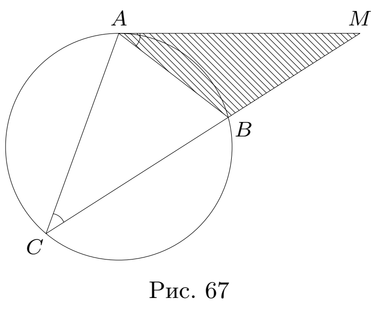


Рис. 67

Соединим точку A с точками B и C. Рассмотрим треугольники AMB и CMA. Угол при вершине M у них общий, а угол BAM — это угол между касательной AM и хордой AB. Он равен половине дуги AB, заключенной между ними. Но половине этой дуги равен и вписанный угол ACB. Поэтому треугольники AMB и CMA подобны по двум углам. Следовательно, $\frac{AM}{CM} = \frac{BM}{AM}$, откуда $BM \cdot CM = AM^2$.

Пример 1. Точка M внутри окружности делит хорду этой окружности на отрезки, равные a и b. Через точку M проведена хорда AB, делящаяся точкой M пополам. Найдите AB.

Решение. Обозначим $AM = BM = x$ (рис. 68). По теореме об отрезках пересекающихся хорд $x^2 = ab$, откуда $x = \sqrt{ab}$. Следовательно, $AB = 2x = 2\sqrt{ab}$.

Пример 2. Из точки M, расположенной вне окружности на расстоянии $\sqrt{7}$ от центра, проведены касательная MA (A — точка касания) и секущая, внутренняя часть которой вдвое меньше внешней и равна радиусу окружности. Найдите радиус окружности.

Решение. Пусть секущая пересекает окружность с центром O (рис. 69) в точках B и C (B между C и M). Обозначим через x радиус окружности. Тогда $BC = x$ и $BM = 2x$. Если AM — касательная к окружности, то по теореме о касательной и секущей $AM^2 = BM \cdot CM = 2x \cdot 3x = 6x^2$. С другой стороны, по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OAM находим, что $AM^2 = OM^2 - OA^2 = 7 - x^2$. Из уравнения $6x^2 = 7 - x^2$ находим, что $x = 1$.

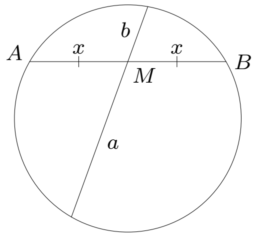


Рис. 68

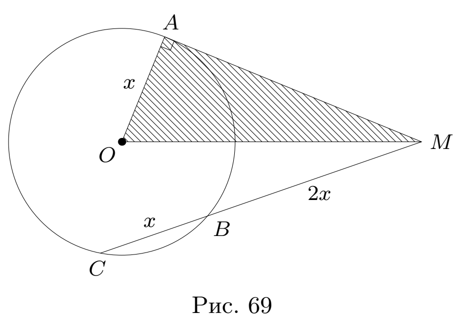


Рис. 69

Пример 3. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, причем $AM = AC$. Докажите, что продолжения высот AA_1 и DD_1 треугольников CAM и BDM пересекаются на окружности.

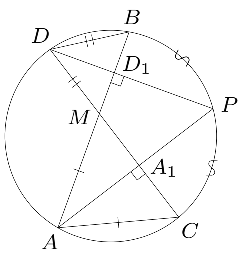


Рис. 70

Решение. Треугольники CAM и BDM подобны по двум углам (рис. 70). По условию один из них равнобедренный, значит, второй также равнобедренный. Высоты равнобедренных треугольников, проведенные к основанию, являются биссектрисами углов при вершинах, т. е. лучи AA_1 и DD_1 — биссектрисы равных вписанных углов BAC и BDC. Каждая из этих биссектрис делит дугу BC пополам, следовательно, они проходят через одну точку на окружности — середину P дуги BC.

Задачи первого уровня

3.1. Диагонали AC и BD вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M. Известно, что $AM = 3$, $BM = 4$ и $CM = 6$. Найдите CD.

3.2. Хорды AB и CD пересекаются в точке P. Известно, что $AB = CD = 12$, $\angle APC = 60°$ и $AC = 2 \cdot BD$. Найдите стороны треугольника APC.

3.3. Через точку M проведены две прямые. Одна из них касается некоторой окружности в точке A, а вторая пересекает эту окружность в точках B и C, причем $BC = 7$ и $BM = 9$. Найдите AM.

3.4. Радиусы двух концентрических окружностей относятся как $1 : 2$. Хорда большей окружности делится меньшей окружностью на три равные части. Найдите отношение этой хорды к диаметру большей окружности.

3.5. Дана точка P, удаленная на расстояние, равное 7, от центра окружности, радиус которой равен 11. Через точку P проведена хорда, равная 18. Найдите отрезки, на которые делится хорда точкой P.

3.6. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке K, известно, что $AB = a$, $BK = b$, $AK = c$, $CD = d$. Найдите AC.

3.7⁰. Точка M лежит внутри окружности радиуса R и удалена от центра на расстояние d. Докажите, что для любой хорды AB этой окружности, проходящей через точку M, произведение $AM \cdot BM$ одно и то же. Чему оно равно?

3.8⁰. Точка M лежит вне окружности радиуса R и удалена от центра на расстояние d. Докажите, что для любой прямой, проходящей через точку M и пересекающей окружность в точках A и B, произведение $AM \cdot BM$ одно и то же. Чему оно равно?

3.9. Из точки A проведены два луча, пересекающие данную окружность: один — в точках B и C, другой — в точках D и E. Известно, что $AB = 7$, $BC = 7$, $AD = 10$. Найдите DE.

3.10. Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 и касательная, равная $\frac{2}{3}$ внутреннего отрезка секущей. Найдите длину касательной.

3.11. В квадрат $ABCD$ со стороной a вписана окружность, которая касается стороны CD в точке E. Найдите хорду, соединяющую точки, в которых окружность пересекается с прямой AE.

3.12. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C катет BC равен a, радиус вписанной окружности равен r. Вписанная окружность касается катета AC в точке D. Найдите хорду, соединяющую точки пересечения окружности с прямой BD.

3.13. Из точки A, лежащей вне окружности, проведены к окружности касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16, а расстояние от точки A до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32. Найдите радиус окружности, если расстояние от центра окружности до секущей равно 5.

Задачи второго уровня

3.14. Диагональ AC вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ является биссектрисой угла BAD. Докажите, что прямая BD отсекает от треугольника ABC подобный ему треугольник.

3.15. Пересекающиеся хорды окружности делятся точкой пересечения в одном и том же отношении. Докажите, что эти хорды равны между собой.

3.16. Каждая из двух равных пересекающихся хорд окружности делится точкой пересечения на два отрезка. Докажите, что отрезки первой хорды соответственно равны отрезкам второй.

3.17. В круге проведены две хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M; K — точка пересечения биссектрисы угла BMD с хордой BD. Найдите отрезки BK и KD, если $BD = 3$, а площади треугольников CMB и AMD относятся как $1 : 4$.

3.18$^{\mathbf{0}}$. Две окружности пересекаются в точках A и B. Проведены хорды AC и AD этих окружностей так, что хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB, если $CB = a$, $DB = b$.

3.19. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Известно, что $BC = 3 \cdot MN$ и $AB = 12$. Найдите AN.

3.20$^{\mathbf{0}}$. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

3.21. В угол вписаны две окружности; одна из них касается сторон угла в точках K_1 и K_2, а другая — в точках L_1 и L_2. Докажите, что прямая K_1L_2 высекает на этих двух окружностях равные хорды.

3.22. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если $BC = 4$ и $AK = 6$.

3.23. Продолжение медианы треугольника ABC, проведенной из вершины A, пересекает описанную окружность в точке D. Найдите BC, если $AC = DC = 1$.

3.24. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.

3.25. Сторона AD квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Касательная BK, проведенная из вершины B к этой же окружности, равна 2. Найдите диаметр окружности.

3.26. Через вершину наибольшего угла треугольника со сторонами 6, 8 и 10 проведена касательная к окружности, описанной около этого треугольника. Найдите отрезок касательной, заключенный между точкой касания и точкой пересечения с продолжением наибольшей стороны треугольника.

3.27. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$ и $BC = 4$ через середины сторон AB и AC проведена окружность, касающаяся катета BC. Найдите длину отрезка гипотенузы AC, который лежит внутри этой окружности.

3.28. Точка B расположена между точками A и C. На отрезках AB и AC как на диаметрах построены окружности. Прямая, перпендикулярная AC и проходящая через точку B, пересекает бóльшую окружность в точке D. Прямая, проходящая через точку C, касается меньшей окружности в точке K. Докажите, что $CD = CK$.

3.29^{0}. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

3.30. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E соответственно. Найдите высоту треугольника ABC, опущенную из вершины A, если $AB = 5$, $AC = 2$, а точки A, D, E, C лежат на одной окружности.

3.31. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = AC)$ проведены биссектрисы AD, BE, CF. Найдите BC, если известно, что $AC = 1$, а вершина A лежит на окружности, проходящей через точки D, E, F.

3.32. Две окружности внутренне касаются. Прямая, проходящая через центр большей окружности, пересекает ее в точках A и D, а меньшую окружность — в точках B и C. Найдите отношение радиусов окружностей, если $AB : BC : CD = 3 : 7 : 2$.

3.33. Точки A, B и C лежат на одной прямой (точка B расположена между точками A и C). Через точки A и B проводятся окружности, а через точку C — касательные к ним. Найдите геометрическое место точек касания.

3.34. Окружность и прямая касаются в точке M. Из точек A и B этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные a и b соответственно. Найдите расстояние от точки M до прямой AB.

3.35. Из точки A, находящейся на расстоянии 5 от центра окружности радиуса 3, проведены две секущие AKC и ALB, угол между которыми равен 30° (K, C, L, B — точки пересечения секущих с окружностью). Найдите площадь треугольника AKL, если площадь треугольника ABC равна 10.

3.36. В окружности проведены три попарно пересекающиеся хорды. Каждая хорда разделена точками пересечения на три равные части. Найдите радиус окружности, если одна из хорд равна a.

3.37. В окружность вписан треугольник. Вторая окружность, концентрическая с первой, касается одной стороны треугольника и делит каждую из двух других сторон на три равные части. Найдите отношение радиусов этих окружностей.

3.38. Хорда AB стягивает дугу окружности, равную 120°. Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB. При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника ABC.

3.39. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ и проходит через вершину C. Сторону DC она пересекает в точке N. Найдите площадь трапеции $ABND$, если $AB = 9$ и $AD = 8$.

3.40. Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B. Из точки A параллельно OB проведен луч, пересекающий окружность в точке C. OC пересекает окружность в точке E. Прямые AE и OB пересекаются в точке K. Докажите, что $OK = KB$.

3.41$^{\mathbf{0}}$. Точки A_1 и B_1 принадлежат соответственно сторонам OA и OB угла AOB (не равного 180°) и $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1$.

Докажите, что точки A, B, A_1, B_1 принадлежат одной окружности.

3.42. Через точку P, лежащую на общей хорде двух пересекающихся окружностей, проведены хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках K, L, M и N — вписанный.

3.43$^{\mathbf{0}}$. Точка M находится на продолжении хорды AB. Докажите, что если точка C окружности такова, что $MC^2 = MA \cdot MB$, то MC — касательная к окружности.

3.44$^{\mathbf{0}}$. Докажите, что квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, ее заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.

Задачи третьего уровня

3.45. Постройте окружность, проходящую через две данные точки A и B и касающуюся данной окружности S.

3.46$^{\mathbf{0}}$. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Докажите, что три общие хорды каждой пары этих окружностей пересекаются в одной точке.

3.47. На продолжении хорды KL окружности с центром O взята точка A и из нее проведены касательные AP и AQ; M — середина отрезка PQ. Докажите, что $\angle MKO = \angle MLO$.

3.48. Две окружности радиусов r и R ($r < R$) внешним образом касаются друг друга. Прямая касается этих окружностей в точках M и N. В точках A и B окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые AB и MN пересекаются в точке C. Из точки C проведена касательная к третьей окружности (D — точка касания). Найдите CD.

3.49. На боковых сторонах трапеции как на диаметрах построены окружности. Докажите, что отрезки касательных, проведенных из точки пересечения диагоналей трапеции к этим окружностям, равны между собой.

3.50. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки A до прямых BC, DC и DE равны соответственно a, b, c. Найдите расстояние от вершины A до прямой BE.

3.51. (*Теорема Птолемея.*) Докажите, что если четырехугольник вписан в окружность, то сумма произведений длин двух пар его противоположных сторон равна произведению длин его диагоналей.

§ 3.2. Теорема косинусов

Теорема косинусов. *Пусть a, b, c — стороны треугольника; α — угол, противолежащий стороне a. Тогда*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.$$

Пример 1. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 9, катет $BC = 3$. На гипотенузе взята точка M, причем $AM : MB = 1 : 2$. Найдите CM.

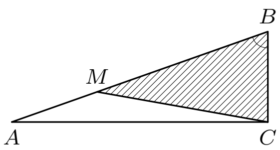


Рис. 71

Решение. Из прямоугольного треугольника ABC (рис. 71) находим, что $\cos\angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{3}$. В треугольнике BMC известны стороны $BC = 3$, $BM = 6$ и косинус угла между ними. По теореме косинусов

$$CM^2 = BC^2 + BM^2 - 2BC \cdot BM \cdot \cos\angle B = 9 + 36 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} = 33.$$

Следовательно, $CM = \sqrt{33}$.

Пример 2. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Известно, что $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120^\circ$. Найдите сторону AB.

Решение. Поскольку $\angle AOB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$ (см. задачу **1.116⁰**), то $\angle C = 2\angle AOB - 180^\circ = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$ (рис. 72). По теореме косинусов

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos\angle C = \\ = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{1}{2} = a^2 + b^2 - ab.$$

Следовательно, $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$.

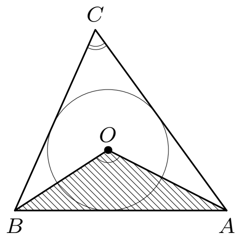


Рис. 72

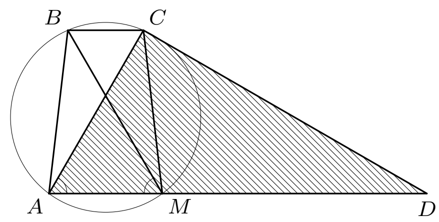


Рис. 73

Пример 3. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, а боковая сторона CD равна $8\sqrt{3}$. Окружность, проходящая через точки A, B и C, пересекает прямую AD в точке M, $\angle AMB = 60^\circ$. Найдите BM.

Решение. Трапеция $ABCM$ вписана в окружность (рис. 73), поэтому она равнобедренная. Следовательно, $\angle CAM = \angle AMB = 60^\circ$.

Обозначим $AC = x$ и применим теорему косинусов к треугольнику ACD:

$$(8\sqrt{3})^2 = x^2 + 16^2 - 16x.$$

Отсюда находим, что $x = 8$.

Задачи первого уровня

3.52. Стороны треугольника равны 5, 8, 10. Верно ли, что треугольник остроугольный?

3.53. Сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата третьей стороны. Докажите, что против третьей стороны лежит острый угол.

3.54. Дан равносторонний треугольник со стороной a. Найдите отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, делящей противоположную сторону в отношении $2 : 1$.

3.55. Одна из сторон треугольника вдвое больше другой, а угол между этими сторонами равен 60°. Докажите, что треугольник прямоугольный.

3.56. Сторона треугольника равна $2\sqrt{7}$, а две другие стороны образуют угол в 30° и относятся как $1 : 2\sqrt{3}$. Найдите эти стороны.

3.57. Одна из сторон параллелограмма равна 10, а диагонали равны 20 и 24. Найдите косинус острого угла между диагоналями.

3.58. Угол при вершине D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC равен 60°. Найдите диагонали трапеции, если $AD = 10$, $BC = 3$ и $CD = 4$.

3.59. Одна из сторон треугольника равна 6, вторая сторона равна $2\sqrt{7}$, а противолежащий ей угол равен 60°. Найдите третью сторону треугольника.

3.60. На продолжении боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC за вершину A взята точка D, причем $AD = 2 \cdot AB$. Известно, что $AB = AC$, $\angle BAC = 120^\circ$. Докажите, что треугольник BDC равнобедренный.

3.61. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AD и BC ромба $ABCD$, причем $DM : AM = BN : NC = 2 : 1$. Найдите MN, если известно, что сторона ромба равна a, а $\angle BAD = 60^\circ$.

3.62⁰. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его четырех сторон.

3.63. Диагональ параллелограмма, равная b, перпендикулярна стороне параллелограмма, равной a. Найдите вторую диагональ параллелограмма.

3.64. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4, проведена медиана к боковой стороне. Найдите основание треугольника, если эта медиана равна 3.

3.65. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5. Найдите боковую сторону.

3.66⁰. Стороны треугольника равны a, b, c. Найдите медиану, проведенную к стороне, равной c.

3.67. Стороны треугольника равны 11, 13 и 12. Найдите медиану, проведенную к большей стороне.

3.68. В треугольнике две стороны равны 11 и 23, а медиана, проведенная к третьей, равна 10. Найдите третью сторону.

3.69. Докажите, что отношение суммы квадратов медиан треугольника к сумме квадратов его сторон равно $\frac{3}{4}$.

3.70. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $AD = 2$. Найдите AC.

3.71. Можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность, если $\angle ADC = 30^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 6$?

3.72. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите биссектрису угла при основании.

3.73. В треугольнике ABC известно, что $AC = 13$, $AB = 14$, $BC = 15$. На стороне BC взята точка M, для которой $CM : MB = 1 : 2$. Найдите AM.

3.74. В треугольнике ABC известно, что $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 18$. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины наибольшего угла.

3.75. Найдите косинусы углов трапеции с основаниями, равными 3 и 7 и боковыми сторонами, равными 2 и 5.

3.76. Медианы треугольника ABC, проведенные из вершин B и C, равны 6 и 9 и пересекаются в точке M. Известно, что $\angle BMC = 120^\circ$. Найдите стороны треугольника.

Задачи второго уровня

3.77. Стороны параллелограмма равны 2 и 4, а угол между ними равен 60°. Через вершину этого угла проведены прямые, проходящие через середины двух других сторон параллелограмма. Найдите косинус угла между этими прямыми.

3.78. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке M, при этом $AM = 1$, $BM = 4$. Найдите CM, если известно, что $\angle BAC = 120^\circ$.

3.79. Основания трапеции равны 1 и 6, а диагонали — 3 и 5. Под каким углом видны основания из точки пересечения диагоналей?

3.80. В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны a и b и пересекаются под углом 60°. Найдите диагонали четырехугольника.

3.81. Диагонали выпуклого четырехугольника равны c и d и пересекаются под углом 45°. Найдите отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника.

3.82. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, удален от вершин острых углов на расстояния a и b. Найдите гипотенузу.

3.83. Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$ с углом 45° при вершине A, причем $\angle AMD = 90^\circ$ и $BM : MC = 2 : 3$. Найдите отношение соседних сторон параллелограмма.

3.84. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, если $AD = \sqrt{3}$, а угол $\angle ABC = 120^\circ$.

3.85. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, касается гипотенузы в точке M. Найдите расстояние от точки M до вершины прямого угла.

3.86. Точка M лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC со стороной $3a$, причем $AM : MC = 1 : 2$. Точки K и L на сторонах AB и BC являются вершинами другого равностороннего треугольника MKL. Найдите его стороны.

3.87. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Найдите AC, если $BC = a$, $AB = b$, $\dfrac{DE}{AC} = k$.

3.88. В окружности проведены хорды AB и BC, причем $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60^\circ$. Найдите длину той хорды окружности, которая делит угол ABC пополам.

3.89. Дан треугольник ABC. Известно, что $AB = 4$, $AC = 2$ и $BC = 3$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M. Найдите KM.

3.90. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC, AC в точках M, D, N соответственно. Найдите MD, если известно, что $NA = 2$, $NC = 3$, $\angle BCA = 60^\circ$.

3.91. В окружности радиуса $R = 4$ проведены хорда AB и диаметр AK, образующий с хордой угол $22{,}5^\circ$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C. Найдите медиану AM треугольника ABC.

3.92. В треугольнике ABC сторона AC больше стороны AB. Докажите, что медиана, проведенная из вершины B, меньше медианы, проведенной из вершины C.

3.93. Стороны треугольника равны a, b и c. Найдите биссектрису треугольника, проведенную к стороне a.

3.94. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3\sqrt{39}$ и $BC = \sqrt{39}$. Кроме того, дано, что угол BAD равен 30° и угол ADC равен 60°. Через точку D проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найдите длину отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

3.95. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = a$, $BC = b$, $\angle ABC = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

3.96. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки окружности до вершин правильного вписанного в эту окружность треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на окружности.

3.97. Окружности радиусов r и R касаются внутренним образом. Найдите сторону правильного треугольника, одна вершина которого совпадает с точкой касания, а две другие лежат на разных данных окружностях.

3.98. Сторона ромба $ABCD$ равна a, а острый угол равен α. На отрезках AD и BC построены как на сторонах вне ромба правильные треугольники. Найдите расстояние между центрами этих треугольников.

3.99. В окружность радиуса 2 вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K, лежащей на продолжении стороны AF так, что $KA < KF$ и $KA = \sqrt{11} - 1$, проведена секущая KH, пересекающая окружность в точках N и H. Известно, что внешняя часть секущей KH равна 2 ($KN = 2$), а угол NFH тупой. Найдите угол HKF.

3.100. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану BM на три равные части. Найдите отношение $BC : CA : AB$.

3.101. Медиана AD остроугольного треугольника ABC равна 5. Проекции этой медианы на стороны AB и AC равны 4 и $2\sqrt{5}$ соответственно. Найдите сторону BC.

3.102. (*Теорема Стюарта.*) Точка D расположена на стороне BC треугольника ABC. Докажите, что

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

Задачи третьего уровня

3.103. Даны отрезки a и b. Постройте отрезок $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

3.104. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$, вписанная в треугольник ABD, касается стороны AB в точке M, а окружность радиуса $\sqrt{3}$, вписанная в треугольник BCD, касается стороны BC в точке N. Известно, что $BM = 6$, $BN = 5$. Найдите стороны треугольника ABC.

3.105. Сторона BC треугольника ABC равна 4, сторона AB равна $2\sqrt{19}$. Известно, что центр окружности, проходящей через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найдите AC.

§ 3.3. Теорема синусов

Пусть a, b, c — стороны треугольника; α, β, γ — противолежащие им углы; R — радиус описанной окружности.

Теорема синусов.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Пример 1. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5 и 8 и углом между ними, равным 60°.

Решение. Пусть ABC — треугольник, в котором $AB = 5$, $AC = 8$, $\angle BAC = 60^\circ$, R — искомый радиус описанной окружности (рис. 74). По теореме косинусов

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC} = \\ = \sqrt{25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7.$$

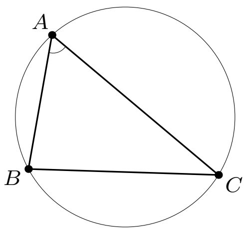


Рис. 74

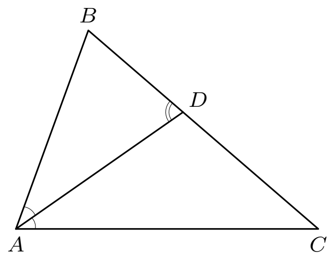


Рис. 75

Следовательно, $R = \dfrac{BC}{2\sin\angle BAC} = \dfrac{7}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

Пример 2. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$, $AB = a$; AD — биссектриса. Найдите BD.

Решение. Угол BDA — внешний угол треугольника ADC (рис. 75), поэтому $\angle ADB = \angle DAC + \angle ACB = \frac{\alpha}{2} + \beta$. По теореме синусов из треугольника ADB находим, что

$$\frac{AB}{\sin\angle ADB} = \frac{BD}{\sin\angle BAD}, \quad \text{или} \quad \frac{a}{\sin(\alpha/2+\beta)} = \frac{BD}{\sin(\alpha/2)},$$

откуда

$$BD = \frac{a\sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2+\beta)}.$$

Пример 3. Дан треугольник ABC, в котором $AC = b$ и $\angle ABC = \alpha$. Найдите радиус окружности, проходящей через центр вписанной в треугольник ABC окружности и вершины A и C.

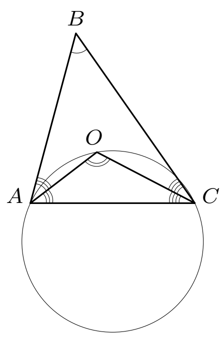


Рис. 76

Решение. Пусть O — центр вписанной в треугольник ABC окружности (рис. 76), R — искомый радиус. Так как O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, то $\angle AOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ (см. задачу $\mathbf{1.116^0}$). Тогда

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle AOC} = \frac{b}{2\sin(90^\circ + \alpha/2)} = \frac{b}{2\cos(\alpha/2)}.$$

Задачи первого уровня

3.106. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2, а угол при вершине равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности.

3.107. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b и b.

3.108. Под каким углом видна из точек окружности хорда, равная радиусу?

3.109. Дан треугольник ABC, в котором $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$, $\angle ABC = 45^\circ$. Найдите угол BAC.

3.110. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом 30°, если известно, что биссектриса, проведенная из вершины прямого угла, равна a.

3.111. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 13, 14, 15.

3.112. Боковая сторона равнобокой трапеции равна a, средняя линия равна b, а один углов при большем основании равен 30°. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

3.113. Основания равнобокой трапеции равны 9 и 21, высота равна 8. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

3.114. Прямая, пересекающая основание равнобедренного треугольника и проходящая через противоположную вершину, делит этот треугольник на два. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, равны.

3.115. С помощью теоремы синусов докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

3.116. В треугольнике известны сторона a и два прилежащих к ней угла β и γ. Найдите биссектрису, проведенную из вершины третьего угла.

3.117. Медиана AM треугольника ABC равна m и образует со сторонами AB и AC углы α и β соответственно. Найдите эти стороны.

Задачи второго уровня

3.118. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороне AB взята точка D, а на стороне AC — точка M, причем CD — биссектриса треугольника ABC, $DM \parallel BC$ и $AM = a$. Найдите CM.

3.119. Углы треугольника равны α, β и γ, а периметр равен P. Найдите стороны треугольника.

3.120. Одна из боковых сторон трапеции образует с бóльшим основанием угол α, а вторая равна a и образует с меньшим основанием угол β. Найдите среднюю линию трапеции, если меньшее основание равно b.

3.121. В окружности радиуса 12 хорда AB равна 6, а хорда BC равна 4. Найдите хорду, соединяющую концы дуги AC.

3.122. Основания трапеции равны 4 и 16. Найдите радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

3.123. На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник. Найдите расстояние между его центром и вершиной C, если $AB = c$ и $\angle C = 120°$.

3.124. Стороны треугольника равны 1 и 2, а угол между ними равен 60°. Через центр вписанной окружности этого треугольника и концы третьей стороны проведена окружность. Найдите ее радиус.

3.125. Докажите, что если стороны a, b и противолежащие им углы α и β треугольника связаны соотношением $\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta}$, то треугольник равнобедренный.

3.126. Две стороны треугольника равны a и b. Найдите третью сторону треугольника, если его угол, лежащий против третьей стороны, в два раза больше угла, лежащего против стороны, равной b.

3.127. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает эти окружности в точках C и D, причем точка A лежит между C и D, а хорды AC и AD пропорциональны радиусам своих окружностей. Докажите, что биссектрисы углов ADB и ACB пересекаются на отрезке AB.

3.128. В окружность вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагональ одной из них равна диагонали другой трапеции.

3.129. Докажите, что для любого треугольника проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного одной стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна третьей стороне.

3.130. Каждое из оснований высот треугольника проецируется на его стороны. Докажите, что длина отрезка, соединяющего проекции, не зависит от выбора высоты.

3.131. На окружности, описанной около треугольника ABC, найдите точку M такую, что расстояние между ее проекциями на прямые AC и BC максимально.

3.132. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AHB, BHC и AHC, равны между собой.

3.133. В окружности проведены две хорды $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB. Найдите радиус окружности.

3.134. Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При этом углы NMP и PMQ равны. Найдите радиус окружности.

3.135. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$, $AC = 5$, $BC = 6$. Найдите расстояние от вершины B до точки пересечения высот треугольника ABC.

3.136. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а $PQ = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

3.137. Отрезки AB и CD — диаметры одной окружности. Из точки M этой окружности опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и CD. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M.

3.138. Постройте треугольник по углу и радиусам вписанной и описанной окружностей.

3.139. Через вершины A и B треугольника ABC проходит окружность радиуса r, пересекающая сторону BC в точке D. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и C, если $AB = c$ и $AC = b$.

3.140. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. Найдите отношение радиуса вписанной в данный треугольник окружности к радиусу описанной около него окружности.

3.141. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр другой окружности, проходящей через вершины A, C и точку пересечения высот треугольника ABC. Найдите AC.

3.142. Дан треугольник ABC, в котором $\angle BAC = 75^\circ$, $AB = 1$, $AC = \sqrt{6}$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\angle BAM = 30^\circ$. Прямая AM пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке N, отличной от A. Найдите AN.

3.143. Даны отрезок AB и на нем точка C. Найдите геометрическое место точек пересечения двух равных окружностей, одна из которых проходит через точки A и C, другая — через точки C и B.

3.144. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и Q. Найдите радиус описанной окружности, если $AC = a$, $PQ = \frac{6}{5}a$.

3.145. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

3.146. Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках C и D. N — точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ACD, и отношение высот треугольников NAC и NAD, опущенных из вершины N.

3.147. В треугольник ABC помещены три равных окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Все три окружности имеют одну общую точку. Найдите радиусы этих окружностей, если радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC равны R и r.

3.148. В выпуклом четырехугольнике $ABKC$ сторона $AB = \sqrt{3}$, диагональ BC равна 1, а углы ABC, BKA и BKC равны 120°, 30° и 60° соответственно. Найдите сторону BK.

3.149. В треугольнике ABC известно, что $AB = 20$, $AC = 24$. Известно также, что вершина C, центр вписанной в треугольник ABC окружности и точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности, центр которой расположен на стороне AC. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности.

Задачи третьего уровня

3.150. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ и расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, равно $\sqrt{2}$. Найдите BC.

3.151. Постройте треугольник по двум сторонам так, чтобы медиана, проведенная к третьей стороне, делила угол треугольника в отношении $1 : 2$.

3.152. Диагональ AC квадрата $ABCD$ совпадает с гипотенузой прямоугольного треугольника ACK, причем точки B и K лежат по одну сторону от прямой AC. Докажите, что $BK = \frac{|AK-CK|}{\sqrt{2}}$ и $DK = \frac{AK+CK}{\sqrt{2}}$.

3.153. На окружности, описанной около треугольника ABC, взята точка M. Прямая MA пересекается с прямой BC в точке L, а прямая CM — с прямой AB в точке K. Известно, что $AL = a$, $BK = b$, $CK = c$. Найдите BL.

3.154. В треугольнике ABC угол ABC равен α, угол BCA равен 2α. Окружность, проходящая через точки A, C и центр описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AB в точке M. Найдите отношение $AM : AB$.

§ 3.4. Площадь

Пусть a, b, c — стороны треугольника; α, β, γ — противолежащие им углы; h_a — высота, проведенная к прямой, содержащей сторону a; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; p — полупериметр.

Формулы площади треугольника:

$S = \frac{1}{2}ah_a$,

$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$,

$S = pr$,

$S = \frac{abc}{4R}$,

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (*формула Герона*).

Пример 1. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Решение. По теореме синусов $\frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{AB}{\sin\angle C}$ (рис. 77), откуда

$$AC = \frac{AB\sin\angle B}{\sin\angle C} = \frac{a\sin\beta}{\sin(180^\circ - (\alpha+\beta))} = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle A = \frac{1}{2}\frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Пример 2. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведенная к третьей, равна 5. Найдите площадь треугольника.

Решение. Пусть AM — медиана треугольника ABC, причем $AM = 5$, $AB = 10$, $AC = 12$ (рис. 78). На продолжении медианы AM за точку M отложим отрезок MD, равный AM. Тогда $ABDC$ — параллелограмм с диагоналями BC и AD, а

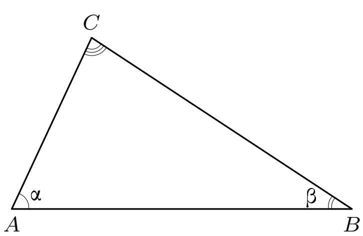


Рис. 77

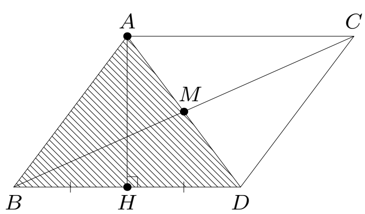


Рис. 78

площадь треугольника ABC равна площади равнобедренного треугольника ABD, в котором $AB = AD = 10$, $BD = 12$. Высоту AH треугольника ABD находим по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABH:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = S_{ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48.$$

Пример 3. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

Решение. Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого пересекаются в точке O (рис. 79). Пусть $\angle AOB = \alpha$. Через вершины A и C проведем прямые, параллельные диагонали BD, а через вершины B и D — прямые, параллельные диагонали AC. Проведенные прямые при пересечении образуют параллелограмм с углом α при вершине. Его площадь равна $AC \cdot BD \sin\alpha$, а площадь четырехугольника $ABCD$ вдвое меньше, т. е. равна $\frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\alpha$.

Заметим, что доказанная формула верна также для невыпуклого четырехугольника.

Пример 4. Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно k.

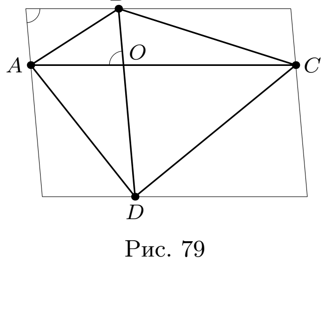


Рис. 79

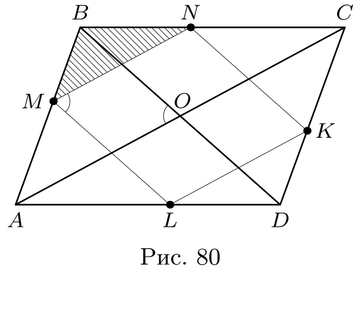


Рис. 80

Решение. Пусть вершины M, N, K и L ромба $MNKL$ расположены соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$ (рис. 80), а стороны MN и KN ромба соответственно параллельны диагоналям AC и BD параллелограмма, причем $\frac{AC}{BD} = k$. Если α — угол между диагоналями параллелограмма, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$ и $S_{KLMN} = MN \cdot KL\sin\alpha = MN^2\sin\alpha$, поэтому $\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{2MN^2}{AC \cdot BD}$.

Заметим, что центр ромба совпадает с центром O параллелограмма. Треугольник BMN подобен треугольнику BAC, а треугольник CKN — треугольнику CDB, поэтому $\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC}$ и $\frac{KN}{BD} = \frac{CN}{BC}$. Отсюда находим, что $\frac{BN}{CN} = \frac{BD}{AC}$, значит,

$$\frac{BN}{BC} = \frac{BD}{BD+AC} = \frac{1}{1+k} \quad \text{и} \quad MN = \frac{AC \cdot BN}{BC} = \frac{AC}{1+k}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{2MN^2}{AC \cdot BD} = \frac{2AC^2}{(1+k)^2} \cdot \frac{1}{AC \cdot BD} = 2 \cdot \frac{AC}{BD} \cdot \frac{1}{(1+k)^2} = \frac{2k}{(1+k)^2}.$$

Задачи первого уровня

3.155. Среди всех треугольников с заданными сторонами AB и AC найдите тот, у которого наибольшая площадь.

3.156. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 8. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу.

3.157. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен $60°$, а сторона AB равна 3. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника ABE.

3.158. Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

3.159. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$, а медиана, проведенная к третьей, равна 2.

3.160. Стороны треугольника равны a, b, b. Найдите высоту, проведенную к стороне, равной b.

3.161. В треугольник со сторонами a и b и углом α между ними вписана полуокружность с диаметром на третьей стороне. Найдите ее радиус.

3.162. а) В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите биссектрису AM.

б) Стороны треугольника равны a и b, а угол между ними равен α. Найдите биссектрису, проведенную из вершины этого угла.

3.163. Найдите площадь трапеции:

а) с основаниями 18 и 13 и боковыми сторонами 3 и 4;

б) с основаниями 16 и 44 и боковыми сторонами 17 и 25.

3.164. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, $AB = c$. Найдите площадь треугольника ABC.

3.165. Найдите площадь трапеции:

а) с основаниями 11 и 4 и диагоналями 9 и 12;

б) с основаниями 6 и 3 и диагоналями 7 и 8.

3.166. В равнобокой трапеции основания равны 40 и 24, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

3.167. Площадь треугольника ABC равна S, $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$. Найдите BC.

3.168. Две стороны треугольника равны $2\sqrt{2}$ и 3, площадь треугольника равна 3. Найдите третью сторону.

3.169. Медианы AN и BM треугольника ABC равны 6 и 9 соответственно и пересекаются в точке K, причем угол AKB равен 30°. Найдите площадь треугольника ABC.

3.170. Расстояния от точки M, лежащей внутри треугольника ABC, до его сторон AC и BC соответственно равны 2 и 4. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если $AB = 10$, $BC = 17$, $AC = 21$.

3.171. В треугольник вписана окружность радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на части, равные 6 и 8. Найдите две другие стороны треугольника.

3.172. Вершины треугольника соединены с центром вписанной окружности. Проведенными отрезками треугольник разделился на три части, площади которых: 28, 60 и 80. Найдите стороны треугольника.

Задачи второго уровня

3.173. Основание равнобедренного треугольника равно a, а высота, опущенная на боковую сторону, равна h. Найдите площадь треугольника.

3.174. Углы треугольника равны α, β и γ, а площадь равна S. Найдите высоты треугольника.

3.175. Углы треугольника равны α, β и γ, а площадь равна S. Найдите стороны треугольника.

3.176⁰. Точки B_1 и C_1 — основания высот BB_1 и CC_1 треугольника ABC, площадь которого равна S, а угол BAC равен α. Найдите площадь треугольника AB_1C_1.

3.177. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14, а биссектриса угла между ними равна 12.

3.178. Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

3.179. Дан треугольник ABC. Из вершины A проведена медиана AM, а из вершины B — медиана BP. Известно, что $\angle APB = \angle BMA$, $\cos\angle ACB = 0{,}8$ и $BP = 1$. Найдите площадь треугольника ABC.

3.180. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, $\angle BAC = \angle CDB$. Продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K, образуя угол AKD, равный 30°. Найдите площадь треугольника AKD, если площадь трапеции равна P.

3.181. В параллелограмме $ABCD$ точка E делит пополам сторону CD, биссектриса угла ABC пересекает в точке O отрезок AE. Найдите площадь четырехугольника $OBCE$, зная, что $AD = a$, $DE = b$, $\angle ABO = \alpha$.

3.182. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найдите площадь трапеции.

3.183. Около окружности радиуса R описан параллелограмм. Площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна S. Найдите стороны параллелограмма.

3.184. В треугольнике ABC известно, что $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 8$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D.

Через точки A, D и C проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника ADE.

3.185. В параллелограмме $ABCD$ острый угол BAD равен α. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных около треугольников DAB, DAC, DBC, ABC соответственно. Найдите отношение площади четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ к площади параллелограмма $ABCD$.

3.186. В четырехугольнике $ABCD$ острый угол между диагоналями равен α. Через каждую вершину проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не содержащей эту вершину. Найдите отношение площади четырехугольника, ограниченного этими прямыми, к площади четырехугольника $ABCD$.

3.187. Из точки P, расположенной внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры на его стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k, b и m, c и n. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

3.188. Периметр выпуклого четырехугольника равен 4. Докажите, что его площадь не превосходит 1.

3.189. Стороны треугольника не превосходят 1. Докажите, что его площадь не превосходит $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

3.190. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E. Известно, что $AB + AD = DE$, $\angle BAD = 60^\circ$, $AE = 6$. Найдите площадь треугольника ABC.

3.191. Докажите, что в треугольнике ABC:

а) $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$, где r — радиус вписанной окружности, а r_a, r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей треугольника;

б) $S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$, где S — площадь треугольника.

3.192. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Известно, что $\angle ABC = \beta$, а площадь четырехугольника $NOMB$ равна S. Найдите AC.

3.193. Две окружности пересекаются в точках A и K. Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK. Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB, касается одной окружности в точке A. Прямая, содержащая отрезок AC, касается другой окружности также в точке A. Известно, что $BK = 1$, $CK = 4$, $\operatorname{tg} \angle CAB = \frac{1}{\sqrt{15}}$. Найдите площадь треугольника ABC.

3.194. В остроугольном треугольнике ABC с углом C, равным $30°$, высоты пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника AMB, если расстояния от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до сторон BC и AC соответственно равны $\sqrt{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.195. На отрезке AB лежат точки C и D, причем точка C — между точками A и D. Точка M взята так, что прямые AM и MD перпендикулярны и прямые CM и MB тоже перпендикулярны. Найдите площадь треугольника AMB, если известно, что $\angle CMD = \alpha$, а площадь треугольников AMD и CMB равны S_1 и S_2 соответственно.

3.196. (*Формула Брахмагупты.*) Докажите, что если стороны вписанного четырехугольника равны a, b, c и d, то его площадь S может быть вычислена по формуле:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ — полупериметр четырехугольника.

3.197. Окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит одну из сторон на отрезки, равные 3 и 4, а противолежащий этой стороне угол равен $120°$. Найдите площадь треугольника.

3.198. Площадь треугольника ABC равна $15\sqrt{3}$. Угол BAC равен $120°$. Угол ABC больше угла ACB. Расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, равно 2. Найдите медиану треугольника ABC, проведенную из вершины B.

3.199. В окружность радиуса 7 вписан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB = BC$, площадь треугольника BCD в два раза меньше площади треугольника ABD, $\angle ADC = 120^\circ$. Найдите все стороны четырехугольника $ABCD$.

3.200. На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12, взяты точки A и B так, что $OA = 15$, $AB = 5$ и A лежит между O и B. Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OB. Найдите площадь треугольника ABC, где C — точка пересечения этих касательных.

3.201. Точки K, L, M, N и P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника KLM, если $LM \parallel KN$, $KM \parallel NP$, $MN \parallel LP$, а угол LOM равен 45°, где O — точка пересечения хорд LN и MP.

3.202. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C, углом B, равным 30°, и катетом $CA = 1$ проведена медиана CD. Кроме того, из точки D под углом 15° к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок BC в точке F. Найдите площадь треугольника CDF.

3.203. Окружность радиуса 3 проходит через вершину B, середины сторон AB и BC, а также касается стороны AC треугольника ABC. Угол BAC острый, и $\sin\angle BAC = \frac{1}{3}$. Найдите площадь треугольника ABC.

3.204. Остроугольный равнобедренный треугольник и трапеция вписаны в окружность. Одно основание трапеции является диаметром окружности, а боковые стороны параллельны боковым сторонам треугольника. Докажите, что трапеция и треугольник равновелики.

Задачи третьего уровня

3.205. Внутри правильного треугольника имеется точка, удаленная от его вершин на расстояния 5, 6 и 7. Найдите площадь треугольника.

3.206. Стороны четырехугольника равны a, b, c и d. Известно, что в этот четырехугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Докажите, что его площадь равна $\sqrt{abcd}$.

3.207. Пусть a, b, c, d — последовательные стороны четырехугольника. Докажите, что если S — его площадь, то $S \leqslant \leqslant \frac{1}{2}(ac+bd)$, причем равенство имеет место только для вписанного четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

3.208. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника $ABCDE$ отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислите площадь пятиугольника $ABCDE$.

3.209. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются стороны AC в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 3$, $MD = 2$, $DN = 2$, $NC = 4$. Найдите стороны треугольника ABC.

3.210. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB, BC и AC построены как на диаметрах полуокружности S_1, S_2 и S по одну сторону от AC. Найдите радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей, если известно, что ее центр удален от прямой AC на расстояние a.

3.211. Докажите, что точка пересечения диагоналей описанного вокруг окружности четырехугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника, вершинами которого служат точки касания сторон первого четырехугольника с окружностью.

Ответы, указания, решения

7 класс

§ 1.1

1.1. 12. **1.2.** 3 : 2, 2 : 5, 2 : 3. **1.3.** 2 : 1, 1 : 2, 1 : 4. **1.4.** 3,5, 8,5. **1.5.** 6. **1.6.** 4; 2. **1.7.** 7; 5; 3; 1. **1.8.** *Указание.* $6 = 2\cdot5-2\cdot2$. **1.9.** *Указание.* а) $8 = 2\cdot11-2\cdot7$; б) $5 = 7\cdot7-4\cdot11$. **1.10.** 2. **1.11.** 2,5. **1.12.** 3 : 7, 4 : 7. **1.13⁰.** 2 : 7 и 5 : 7; 2 : 3 и 5 : 3. **1.14⁰.** $m:(m+n)$ и $n:(m+n)$; $m:(m-n)$ и $n:(m-n)$; $m:(n-m)$ и $n:(n-m)$. **1.15⁰.** $AD:DC = 2:3$. **1.16.** На луче с началом в середине отрезка AB, содержащем точку B. **1.17.** 105°, 75°. **1.18.** 45°, 135°. **1.25.** Пусть M — искомая точка. а) Либо M лежит на отрезке AB и $AM:MB = 2:1$, либо B — середина отрезка AM; б) либо M лежит на отрезке AB и $AM:MB = 1:3$, либо A лежит на отрезке MB и $AM:AB = 1:2$. **1.26.** Пусть M_1 и M_2 — точки, в которых указанное отношение равно 2. а) Все отличные от B точки между M_1 и M_2; б) все точки прямой, не лежащие на отрезке M_1M_2. **1.27.** *Указание.* $40^\circ = 180^\circ - 2\cdot70^\circ$. **1.28.** *Указание.* $1^\circ = 19\cdot19^\circ - 360^\circ$. **1.30.** а) 6°; $0{,}5^\circ$; б) $62{,}5^\circ$; в) 13 ч $5\frac{5}{11}$ мин. **1.31.** В любом месте между избами B и C. **1.32.** В деревне B.

§ 1.2

1.34. *Указание.* Если AM и A_1M_1 — медианы равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 81), то треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

1.35. *Указание.* Если AD и A_1D_1 — биссектрисы равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 82), то треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

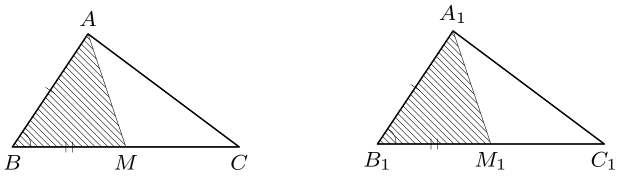


Рис. 81

1.36. *Указание.* $\triangle AOD = \triangle BOC$ и $\triangle AOC = \triangle BOD$ по двум сторонам и углу между ними (рис. 83). $\triangle ABC = \triangle BAD$ и $\triangle ACD = \triangle BDC$ по стороне и двум прилежащим к ней углам. $\triangle ABC = \triangle CDA$ и $\triangle ABD = \triangle CDB$ по трем сторонам.

1.37⁰. Если AD — биссектриса треугольника ABC (рис. 84) и $AB = AC$, то треугольники ABD и ACD равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $BD = CD$, т. е. AD — медиана, и $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$, следовательно, AD — высота.

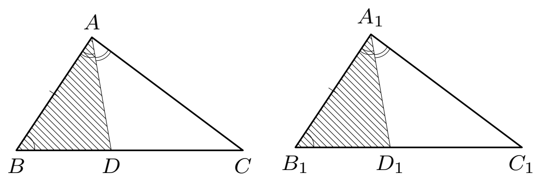


Рис. 82

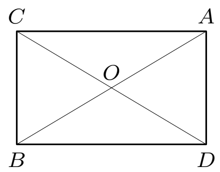


Рис. 83

1.38⁰. Пусть AD — медиана треугольника ABC и $AD \perp BC$ (рис. 85). Тогда треугольники ADB и ADC равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $AB = AC$.

1.39. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC и $AD \perp BC$ (рис. 86). Тогда треугольники ADB и ADC равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому $AB = AC$.

1.40. *Указание.* Пусть P — точка пересечения BK и AM

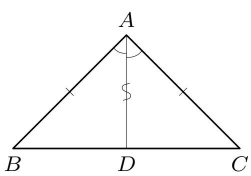


Рис. 84

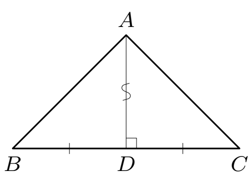


Рис. 85

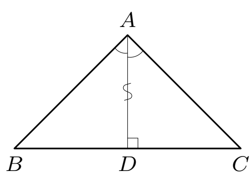


Рис. 86

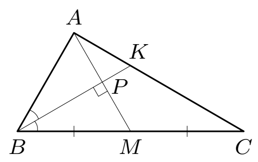


Рис. 87

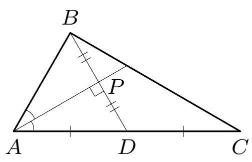


Рис. 88

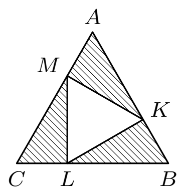


Рис. 89

(рис. 87). В треугольнике ABM биссектриса BP является высотой.

1.41. $AB : AC = 1 : 2$. *Указание.* Пусть P — точка, в которой данная прямая пересекает медиану BD (рис. 88). В треугольнике ABD медиана AP является высотой.

1.42. Пусть точки K, L, M расположены соответственно на сторонах AB, BC, AC равностороннего треугольника ABC, причем $AK : KB = BL : LC = CM : MA$ (рис. 89). Тогда $AK = BL = CM$ и $BK = CL = AM$. Поскольку углы равностороннего треугольника равны, то треугольники AKM, BLK и CML равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно,

$$MK = KL = ML.$$

1.46⁰. Пусть A_1 — точка на продолжении медианы AM за точку M, причем $MA_1 = AM$ (рис. 90). Треугольники A_1MB и AMC равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $A_1B = AC = b$. Аналогично, $A_1C = AB = c$.

1.47⁰. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC и AM — биссектриса треугольника (рис. 91). На продолжении отрезка AM за точку M отложим отрезок MA_1, равный AM.

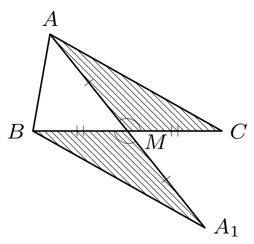


Рис. 90

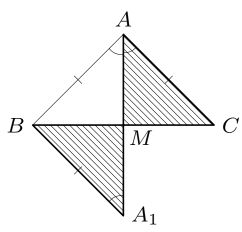


Рис. 91

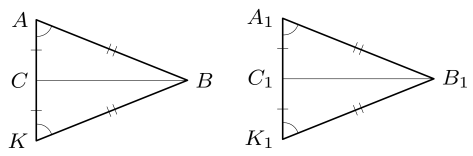


Рис. 92

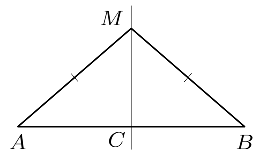


Рис. 93

Тогда треугольники A_1MB и AMC равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle BA_1M = \angle CAM = \angle BAM$. Значит, треугольник ABA_1 равнобедренный. Следовательно, $AB = A_1B = AC$.

1.48. а) Нет; б) нет.

1.49$^{\mathbf{0}}$. б) Пусть катет AC и гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC соответственно равны катету A_1C_1 и гипотенузе A_1B_1 прямоугольного треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 92). На продолжениях катетов AC и A_1C_1 за точки C и C_1 соответственно отложим отрезки CK и C_1K_1, равные соответственно AC и A_1C_1. Тогда медианы BC и B_1C_1 треугольников ABK и $A_1B_1K_1$ являются высотами, поэтому эти треугольники равнобедренные. Они равны по трем сторонам, значит, $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

в) Этот признак следует из признака равенства треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам.

1.51$^{\mathbf{0}}$. Если точка M равноудалена от концов отрезка AB (рис. 93) и не принадлежит этому отрезку, то медиана MC равнобедренного треугольника AMB является его высотой, следовательно, MC — серединный перпендикуляр к отрезку AB. Обратно, каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку AB равноудалена от его концов, так как высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой.

1.52. Центры O_1 и O_2 окружностей (рис. 94) равноудалены от точек A и B, следовательно, O_1O_2 — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

1.54. Пусть в прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ с гипотенузами AB и A_1B_1 равны катеты AC и A_1C_1 и острые углы $\angle B$ и $\angle B_1$ (рис. 95). На продолжении катета BC за

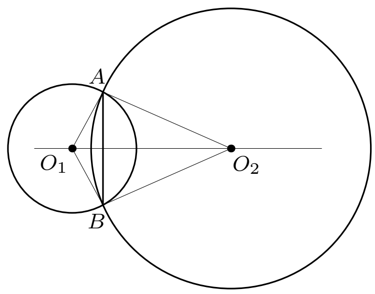


Рис. 94

точку C отложим отрезок CB_2, равный B_1C_1. Тогда прямоугольный треугольник ACB_2 равен треугольнику $A_1C_1B_1$ по двум катетам, поэтому $\angle B_2 = \angle B_1 = \angle B$. Значит, треугольник BAB_2 равнобедренный, поэтому $AB = AB_2 = A_1B_1$. Следовательно, треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$ по катету и гипотенузе.

1.55. Из условия задачи следует, что $BC + AC = BD + AD$ и $BC + BD = AC + AD$ (рис. 96). Складывая и вычитая эти равенства, получим, что $BC = AD$ и $AC = BD$. Значит, треугольники ABC и BAD равны по трем сторонам, поэтому $\angle BAC = \angle ABD$, треугольник AOB равнобедренный. Следовательно, $AO = BO$.

1.56. а) Пусть BM и B_1M_1 — медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 97).

Отложим на продолжениях медиан BM и B_1M_1 за точки M и M_1 отрезки MP и M_1P_1, равные соответственно BM и B_1M_1. Тогда из равенства треугольников PMC и BMA следует, что $PC = AB$, а из равенства треугольников $P_1M_1C_1$ и $B_1M_1A_1$ следует, что $P_1C_1 = A_1B_1$. Поэтому треугольники

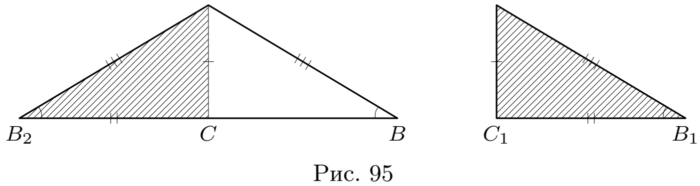


Рис. 95

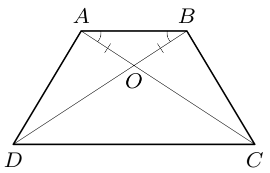


Рис. 96

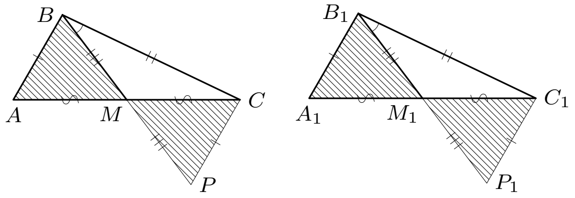


Рис. 97

PBC и $P_1B_1C_1$ равны. Следовательно, $\angle MBC = \angle M_1B_1C_1$. Значит, треугольники MBC и $M_1B_1C_1$ равны. Поэтому $MC = M_1C_1$, тогда и $AC = A_1C_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.

1.57. *Указание.* Воспользуйтесь признаком равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.

1.59. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 98). Поскольку $AB = AD$ и $CB = CD$, точки A и C равноудалены от концов отрезка BD, следовательно, AC — серединный перпендикуляр к отрезку BD.

1.60. Точка P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB (рис. 99), поэтому $AP = BP$. Аналогично, $DP = CP$. Значит, треугольники APD и BPC равны по трем сторонам, поэтому равны их медианы PM и PN. Таким образом, точка P равноудалена от концов отрезка MN, следовательно, она лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.

1.61. *Указание.* Воспользуйтесь признаком равенства прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе.

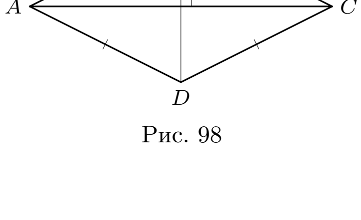


Рис. 98

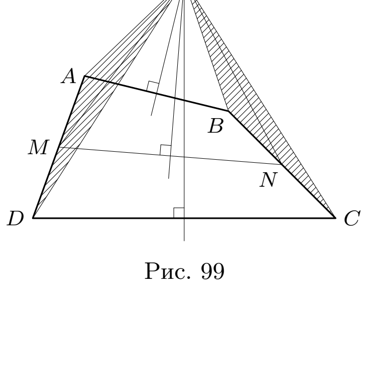


Рис. 99

1.62. *Указание.* Воспользуйтесь признаком равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.

1.63⁰. *Указание.* Из признака равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу следует, что каждая точка, лежащая на биссектрисе, равноудалена от сторон угла.

Из признака равенства прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе следует, что каждая точка внутри угла, равноудаленная от его сторон, лежит на биссектрисе угла.

1.65. 7 или 9.

1.66. *Указание.* Искомые прямые перпендикулярны биссектрисам углов, образованных данными прямыми.

1.67. *Указание.* Пусть точка B_1 симметрична точке B относительно данной прямой (рис. 100). Если прямая AB пересекает прямую l, то точка C — искомая.

1.68. *Указание.* Пусть точка B_1 симметрична точке B относительно данной прямой. Прямая AB пересекает прямую l в искомой точке C.

1.69. *Указание.* Постройте точки, симметричные данным относительно сторон угла.

1.70. *Указание.* Постройте точку, симметричную одной из данных относительно биссектрисы угла при вершине.

1.71⁰. *Указание.* Точка пересечения двух биссектрис треугольника равноудалена от всех сторон треугольника, поэтому она лежит на третьей биссектрисе.

1.72. *Указание.* Точки M и N лежат на биссектрисе угла A.

1.73. Пусть A — недоступная вершина (рис. 101). Возьмем

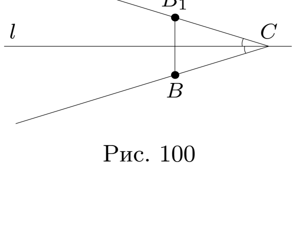


Рис. 100

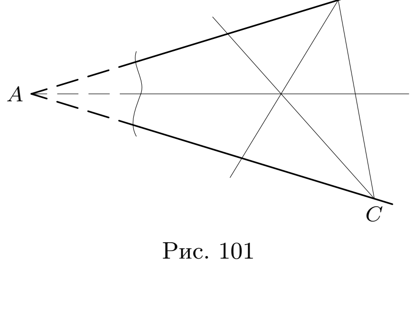


Рис. 101

на сторонах данного угла произвольные точки B и C. Точка пересечения биссектрис треугольника ABC, проведенных из вершин B и C, лежит на биссектрисе угла A, так как биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Таким образом можно найти точку на искомой биссектрисе. Аналогично найдем и вторую точку.

1.74⁰. *Указание.* Точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к двум сторонам треугольника, равноудалена от всех вершин треугольника, поэтому она лежит на серединном перпендикуляре к третьей стороне.

1.75. *Указание.* Существование такой окружности следует из предыдущей задачи. Если бы существовала еще одна такая окружность, то ее центр должен был бы лежать на серединном перпендикуляре к каждой стороне треугольника.

1.76. *Указание.* Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная окружность.

1.77. Предположим, что ABC — искомый треугольник (рис. 102), AB — его данная сторона, $\angle A$ — данный угол, $AC + CB$ — данная сумма сторон. На продолжении отрезка AC за точку C отложим отрезок CB_1, равный CB. Тогда $AB_1 = AC + CB_1 = AC + CB$, а так как $CB = CB_1$, то точка C лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BB_1.

Треугольник AB_1B можно построить (по двум данным сторонам и углу между ними). Пересечение серединного перпендикуляра к стороне BB_1 с отрезком AB_1 есть искомая вершина C.

1.78. *Указание.* Пусть ABC — искомый треугольник (рис. 103), BC и AC — данные стороны, $\angle BAC - \angle ABC$ — данная разность углов (предполагаем, что $\angle BAC > \angle ABC$). Если

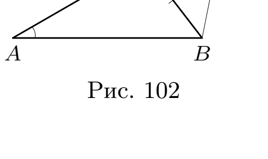


Рис. 102

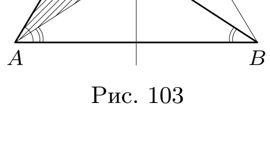


Рис. 103

точка C_1 симметрична вершине C относительно серединного перпендикуляра к стороне AB, то

$$\angle CAC_1 = \angle CAB - \angle C_1AB = \angle CAB - \angle ABC$$

и $AC_1 = BC$. Следовательно, треугольник CAC_1 можно построить по двум сторонам и углу между ними.

1.79. *Указание.* Точки, симметричные данной вершине относительно данных прямых, лежат на стороне искомого треугольника.

1.80. *Указание.* Если две окружности пересекаются в двух точках, то прямая, проходящая через эти точки, перпендикулярна прямой, проходящей через центры окружностей.

1.81$^{\mathbf{0}}$. *Указание.* Предположим, что задача решена. Пусть AB и BC — данные стороны, BM — данная медиана (рис. 104). Отложим на продолжении медианы BM за точку M отрезок MP, равный BM. Тогда $PC = AB$. Треугольник BPC строим по трем сторонам. Продолжив его медиану CM за точку M на отрезок MA, равный MC, получим вершину A искомого треугольника.

1.82. На продолжении отрезка A_1C_1 за точку C_1 возьмем точку M (рис. 105). Тогда

$$\angle AC_1M = \angle BC_1A_1 = \angle AC_1B_1,$$

т. е. C_1A — биссектриса угла B_1C_1M. Поэтому точка A равноудалена от сторон этого угла. Если N — точка на продолжении A_1B_1 за точку B_1, то аналогично докажем, что точка A равноудалена от сторон угла NB_1C_1. Следовательно, точка A

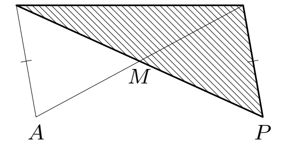


Рис. 104

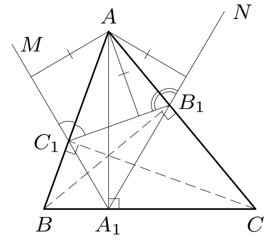


Рис. 105

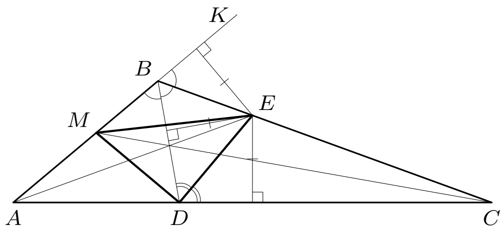


Рис. 106

равноудалена от сторон угла MA_1N, т. е. лежит на биссектрисе этого угла. Поэтому

$$\angle AA_1C = \angle AA_1B_1 + \angle B_1A_1C = \angle AA_1C_1 + \angle C_1A_1B = \angle AA_1B,$$

т. е. $AA_1 \perp BC$.

1.83. Пусть AE, BD и CM — биссектрисы треугольника ABC и $\angle ABC = 120°$. На продолжении стороны AB за точку B возьмем точку K (рис. 106). Поскольку $\angle EBK = 180° - \angle ABC = 180° - 120° = 60° = \angle DBE$, то BE — биссектриса угла DBK, смежного с углом ABD. Поэтому точка E равноудалена от прямых AB, DB и CD. Следовательно, DE — биссектриса угла BDC. Аналогично, DM — биссектриса угла ADB. Следовательно,

$$\angle MDE = \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle BDC) = 90°.$$

§ 1.3

1.89. 30°, 100°, 50°. **1.91.** 75°, 65°, 40°. **1.92.** 90°, 40°, 50° и 90°, 40°, 50°. **1.94⁰.** Две прямые, параллельные данной.

1.96. Треугольник AMD равнобедренный (рис. 107), поэтому $\angle MAD = \angle MDA = \angle CAD$. Следовательно, $MD \parallel AC$.

1.98. 7 : 6 : 5.

1.99. Пусть M и N — середины боковых сторон соответственно AB и AC равнобедренного треугольника ABC (рис. 108). Тогда $AM = AN$ как половины равных отрезков AB и AC, поэтому треугольник AMN также равнобедренный, значит, $\angle AMN = 90° - \frac{1}{2}\angle A = \angle ABC$. Следовательно, $MN \parallel BC$.

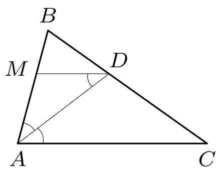


Рис. 107

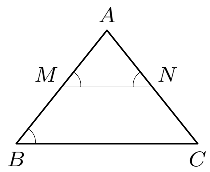


Рис. 108

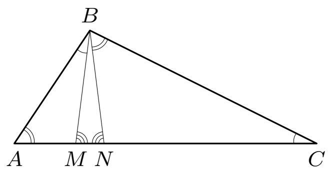


Рис. 109

1.100. 90°. **1.101.** 1.

1.103. Пусть α, β и α + β — углы треугольника. Тогда $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$, откуда $\alpha + \beta = 90°$.

1.104. По теореме о внешнем угле треугольника (рис. 109)

$$\angle BMN = \angle ABM + \angle BAC = \angle ACB + \angle CBN = \angle BNM.$$

1.105. Обозначим $\angle A = \alpha$, $\angle B = \angle C = 2\alpha$ (рис. 110). Тогда $\angle ABD = \alpha$, поэтому $AD = BD$. Кроме того, $\angle BDC = \angle A + \angle ABD = 2\alpha$, поэтому $BD = BC$. Следовательно, $AD = BC$.

1.106. 50°, 110°, 20°.

1.107. 37,5°. *Указание.* AN — биссектриса треугольника ABC.

1.108. 25°. *Указание.* Воспользуйтесь равенством $\angle BAM = \angle BMA = \angle MAC + \angle MCA$.

1.109. 36°. ▮ Обозначим $\angle B = \alpha$ (рис. 111). Тогда $\angle BAM = \alpha$, $\angle AMC = \angle B + \angle BAM = 2\alpha$, $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$. Из уравнения $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$ находим, что $\alpha = 36°$.

1.110. 36°, 36°, 108° и 72°, 72°, 36°. **1.112.** 10°. **1.113.** 30°.

1.114. Да. ▮ Пусть D — точка на продолжении боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC за вершину A

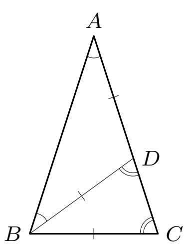


Рис. 110

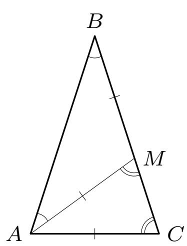


Рис. 111

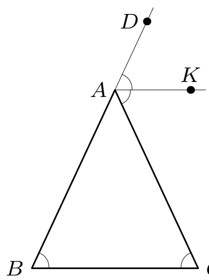


Рис. 112

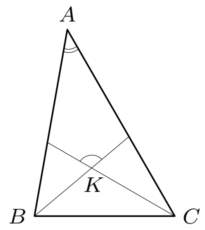


Рис. 113

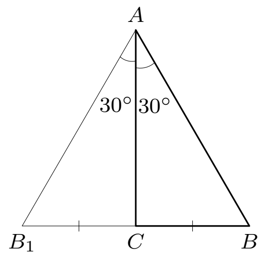


Рис. 114

(рис. 112), а K — точка на биссектрисе угла DAC (внешнего угла треугольника ABC). Обозначим $\angle B = \angle C = \alpha$. Тогда

$$\angle DAC = \angle B + \angle C = 2\alpha, \qquad \angle CAK = \frac{1}{2}\angle DAC = \alpha = \angle C,$$

следовательно, $AK \parallel BC$. Пусть теперь $AK \parallel BC$. Докажем, что треугольник ABC равнобедренный. Действительно,

$$\angle B = \angle ABC = \angle DAK = \angle CAK = \angle ACB = \angle C.$$

1.115. 40°. ▮ Пусть биссектрисы, проведенные из вершин B и C треугольника ABC, пересекаются в точке K и $\angle BKC = 110°$ (рис. 113). Тогда $\angle KBC + \angle KCB = 180° - 110° = 70°$, $\angle ABC + \angle ACB = 2(\angle KBC + \angle KCB) = 140°$. Следовательно,

$$\angle A = 180° - (\angle ABC + \angle ACB) = 180° - 140° = 40°.$$

1.116⁰. $90° + \frac{\alpha}{2}$. **1.117⁰.** α или $180° - \alpha$. **1.118.** 40°.

1.119. Нет. *Указание.* Каждая сторона треугольника видна из точки пересечения биссектрис под тупым углом (см. задачу **1.116⁰**).

1.120⁰. На продолжении катета BC, лежащего против угла в 30° в прямоугольном треугольнике ABC, отложим вне треугольника отрезок B_1C, равный BC (рис. 114). Тогда треугольник ABB_1 равносторонний, поэтому $BC = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2}AB$.

1.121⁰. На продолжении указанного катета BC за вершину C прямого угла треугольника ABC отложим отрезок CB_1, равный BC (рис. 114). Тогда треугольник ABB_1 равносторонний, $\angle B = 60°$, $\angle BAC = 90° - \angle B = 30°$.

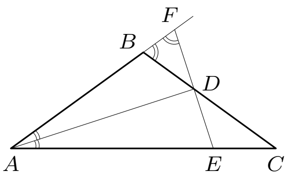


Рис. 115

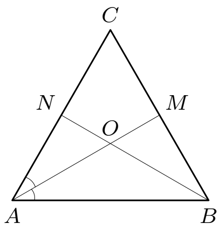


Рис. 116

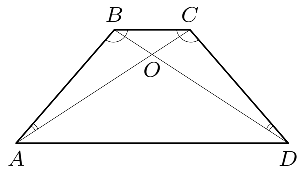


Рис. 117

1.122. 2 и 6.

1.123. Пусть указанный перпендикуляр пересекает прямую AB в точке F (рис. 115). Тогда $DF = DE$, так как биссектриса AD равнобедренного треугольника AFE является его медианой. Поскольку $\angle FBD = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ и $\angle AFD = 90^\circ - \angle DAF = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$, треугольник BDF равнобедренный. Следовательно, $BD = DF = DE$.

1.124. Пусть биссектрисы AM и BN равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 116). Из равенства прямоугольных треугольников ANO и BMO следует, что $OM = ON$. Поскольку $\angle OAN = 30^\circ$, то

$$OM = ON = \frac{1}{2}AO.$$

Аналогично для остальных биссектрис.

1.125. 60°, 60°.

1.126. Пусть AC и BD пересекаются в точке O (рис. 117). Треугольники ABC и DCB равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $AC = BD$ и $\angle BAC = \angle BDC$, а так как $\angle AOB = \angle DOC$, то $\angle ABO = \angle DCO$. Значит, равны треугольники AOB и DOC, поэтому $AO = DO$ и $BO = CO$. Углы при общей вершине O равнобедренных треугольников AOD и BOC равны, поэтому равны и углы при их основаниях: $\angle ACB = \angle CAD$. Следовательно, $AD \parallel BC$.

1.130. 30° или 150°.

1.131. *Указание.* Вычислите углы ABN и CBN.

1.132. 70°.

1.133$^{\mathbf{0}}$. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой AB (рис. 118). Обозначим $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Тогда

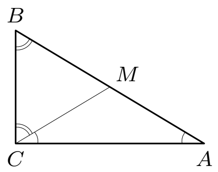


Рис. 118

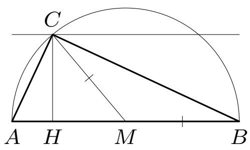


Рис. 119

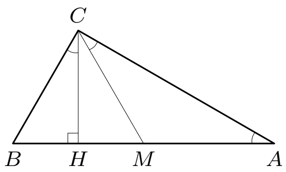


Рис. 120

$\alpha + \beta = 90^\circ$. Отметим на гипотенузе такую точку M, что $\angle ACM = \alpha$. Тогда

$$\angle BCM = \angle ACB - \angle ACM = 90^\circ - \alpha = \beta = \angle CBM.$$

Так как треугольники ACM и BCM равнобедренные, то $AM = CM = BM$, т. е. CM — медиана треугольника ABC и $CM = \frac{1}{2}AB$.

1.134. Предположим, что ABC — искомый треугольник (рис. 119), AB — его данная гипотенуза, CH — данная высота. Тогда медиана CM равна половине AB, поэтому вершина C лежит на окружности с центром M и диаметром AB. С другой стороны, вершина C удалена от прямой AB на расстояние, равное данной высоте, значит, точка C лежит на прямой, параллельной AB и расположенной на расстоянии, равном данной высоте, от прямой AB. Отсюда вытекает построение треугольника.

1.135. Четверть окружности.

1.136. Пусть CH и CM — высота и медиана прямоугольного треугольника ABC, проведенные из вершины прямого угла C, $\angle A = 30^\circ$ (рис. 120). Каждый из углов HCB и HAC в сумме с углом ACH составляют 90°, поэтому $\angle HCB = \angle HAC = \angle A = 30^\circ$. С другой стороны, в равнобедренном треугольнике AMC (см. задачу **1.133⁰**) углы при основании AC равны, поэтому $\angle ACM = \angle CAM = \angle A = 30^\circ$. Следовательно,

$$\angle HCM = \angle ACB - \angle HCB - \angle ACM = 90^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

1.137. Пусть M — середина гипотенузы прямоугольного треугольника ABC, $\angle A = 30^\circ$, точка K лежит на катете AC,

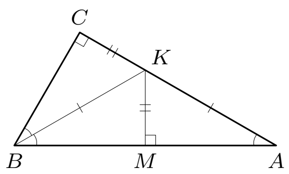


Рис. 121

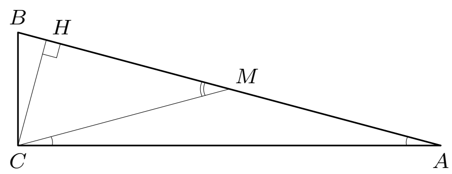


Рис. 122

$MK \perp AB$ (рис. 121). Тогда $BK = AK$, $\angle CBK = \angle ABC - \angle ABK = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \angle KBM$. Из равенства прямоугольных треугольников BCK и BMK следует, что $MK = CK = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}AK$, поэтому $AC = CK + AK = CK + 2CK = 3CK$. Значит, $MK = CK = \frac{1}{3}AC$.

1.138. Пусть CH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведенная из вершины прямого угла C, $\angle A = 15^\circ$ (рис. 122). Проведем медиану CM. Тогда $\angle CMH$ — внешний угол равнобедренного треугольника AMC, поэтому $\angle CMH = 30^\circ$. Из прямоугольного треугольника CMH находим, что $CM = 2CH = 2$. Следовательно, $AB = 2AM = 2CM = 4$.

1.139. *Указание.* B_2A_1 — медиана прямоугольного треугольника BB_2C, проведенная к гипотенузе BC, поэтому $B_2A_1 = \frac{1}{2}BC$ (рис. 123).

1.140. *Указание.* Пусть CH — высота прямоугольного треугольника ABC (рис. 124). Тогда треугольник AME равен треугольнику CHA, а треугольник FNB — треугольнику BHC.

1.141. Обозначим $\angle BAC = \alpha$ (рис. 125). Из равенства прямоугольных треугольников ABC и DKC (по двум катетам)

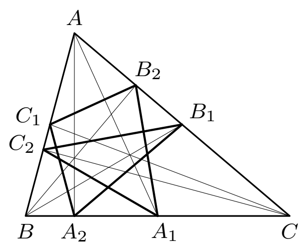


Рис. 123

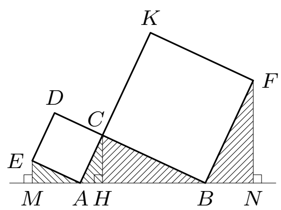


Рис. 124

следует, что $\angle CDK = \angle BAC = \alpha$. Пусть прямая CP пересекает отрезок AB в точке H. Поскольку CP — медиана прямоугольного треугольника DKC, проведенная из вершины прямого угла,

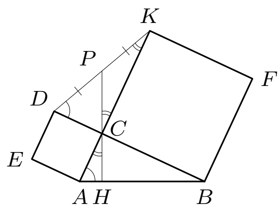


Рис. 125

$$\angle ACH = \angle KCP = \angle CKD = 90^\circ - \alpha.$$

Следовательно,

$$\angle AHC = 180^\circ - \angle ACH - \angle CAH = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ.$$

1.143. а) $60^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ$; б) $0^\circ < \alpha \leqslant 60^\circ$; в) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

1.144⁰. а) 360°; б) 540°; в) $180^\circ(n-2)$.

1.145. 180°.

1.146. У девятиугольника $\frac{9 \cdot 6}{2} = 27$ диагоналей. Через произвольную точку проведем 27 прямых, соответственно параллельных этим диагоналям. Получим 54 угла. Если каждый из них не меньше 7°, то их сумма не меньше $54 \cdot 7^\circ = 378^\circ > 360^\circ$, что невозможно.

1.147. 360°. **1.148.** 135°. **1.149.** 45°.

1.150. *Указание.* Пусть искомая точка B построена, BC — перпендикуляр, опущенный из точки B на вторую сторону угла, O — вершина данного угла, $AB = BC$ (рис. 126). Предположим, что точка B лежит на отрезке OA. Тогда угол BAC при основании равнобедренного треугольника ABC равен половине внешнего угла OBC, который дополняет данный угол до прямого. Аналогично для случая, когда точка B лежит вне отрезка OA.

1.151⁰. Предположим, что треугольник ABC построен (рис. 127). Пусть $BC = a$ — данная сторона, $\angle A = \alpha$ — данный угол, $AB + AC = d$ — данная сумма сторон. На продолжении

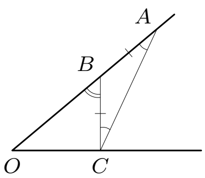


Рис. 126

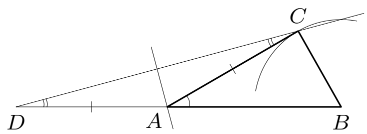


Рис. 127

стороны BA за точку A отложим отрезок AD, равный AC. Тогда $BD = BA + AD = BA + AC = d$, треугольник DAC равнобедренный. Поэтому $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\alpha$.

Отсюда вытекает следующее построение. Строим отрезок BD, равный d. От луча DB откладываем угол, равный $\frac{1}{2}\alpha$. С центром в точке B проводим окружность радиуса a. Точка пересечения этой окружности с проведенным ранее лучом (таких точек может быть две) есть искомая вершина C. Пересечение серединного перпендикуляра к отрезку DC с прямой BD дает искомую вершину A.

1.152. Предположим, что треугольник ABC построен, $\angle A$ и $\angle B$ — данные углы, P — данный периметр (рис. 128). На продолжении отрезка AB за точку B отложим отрезок BB_1, равный BC, а на продолжении отрезка AB за точку A — отрезок AA_1, равный AC. Треугольники A_1AC и B_1BC — равнобедренные. Поэтому

$$\angle A_1 = \frac{1}{2}\angle A, \qquad \angle B_1 = \frac{1}{2}\angle B,$$

$$A_1B_1 = A_1A + AB + BB_1 = AC + AB + BC = P.$$

Треугольник, равный треугольнику A_1B_1C, строим по стороне (равной P) и двум прилежащим к ней углам ($\angle A_1 = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle B_1 = \frac{1}{2}\angle B$). Серединные перпендикуляры к сторонам A_1C и B_1C пересекают отрезок A_1B_1 в искомых вершинах A и B.

1.153. Так как $AB = BK = CK = CL$, то

$$\angle ABK = \angle ABC + \angle CBK = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ,$$

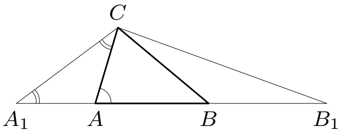


Рис. 128

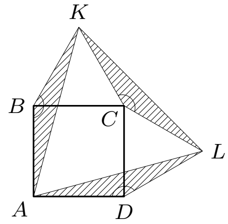


Рис. 129

$$\angle KCL = 360^\circ - \angle DCL - \angle DCB - \angle BCK =$$
$$= 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 150^\circ,$$

то треугольники ABK и KCL равны по двум сторонам и углу между ними (рис. 129). Следовательно, $KL = AK$. Аналогично, $KL = AL$.

1.154. 1 : 2. ▌ Пусть точки K, L, M лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC правильного треугольника ABC, причем $KL \perp BC$, $LM \perp AC$, $MK \perp AB$ (рис. 130). Тогда

$$\angle MKL = 180^\circ - \angle AKM - \angle LKB = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Аналогично, $\angle KML = 60^\circ$, значит, треугольник KLM также равносторонний. Прямоугольные треугольники AKM, BLK и CML равны по гипотенузе и острому углу, а так как $CM = AK = \frac{1}{2}AM$, то $CM : AM = 1 : 2$. Аналогично, $AK : KB = BL : LC = 1 : 2$.

1.155. 90°. ▌ Разобьем квадрат $ABCD$ на 16 равных квадратов прямыми, параллельными его сторонам (рис. 131). Пусть две такие прямые, проходящие через точку L, пересекают стороны AB и AD в точках M и N соответственно. Тогда прямоугольные треугольники KML и DNL равны. Следовательно, $\angle DLK = \angle NLM = 90^\circ$.

1.156. Пусть биссектриса угла B при основании BC равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AC в точке D и $AD = BC$ (рис. 132). Через точку D проведем прямую, параллельную BC и пересекающую боковую сторону AB

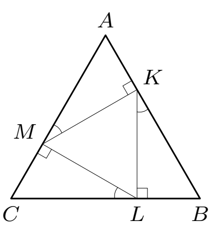


Рис. 130

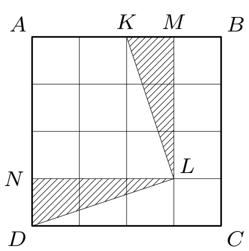


Рис. 131

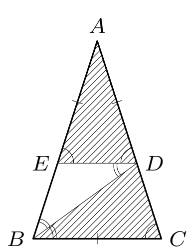


Рис. 132

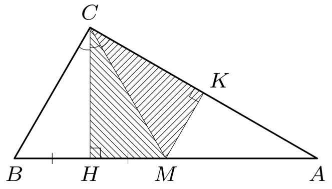


Рис. 133

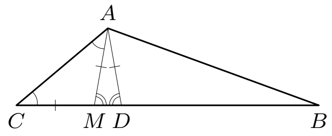


Рис. 134

в точке E. Тогда

$$\angle ADE = \angle ACB = \angle ABC = \angle AED, \qquad AE = AD,$$
$$\angle BDE = \angle DBC = \angle DBE, \qquad DE = BE = DC.$$

Значит, треугольники ADE и BCD равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $BD = AE = AD = BC$.

1.157. 30°, 60°, 90°. ▌ Пусть CH и CM — соответственно высота и медиана треугольника ABC (рис. 133), $\angle BCH = \angle HCM = \angle ACM$. В треугольнике BCM высота CH является биссектрисой, поэтому треугольник BCM равнобедренный, значит, $AM = BM = 2HM$. Из точки M опустим перпендикуляр MK на AC. Прямоугольные треугольники MKC и MHC равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $MK = HM = \frac{1}{2}AM$, значит,

$$\angle CAB = 30^\circ, \qquad \angle KMH = 120^\circ,$$
$$\angle ABC = \angle BMC = \angle KMC = 60^\circ, \qquad \angle ACB = 90^\circ.$$

1.158. 2. ▌ На стороне BC отложим отрезок BM, равный AB (рис. 134). В равнобедренном треугольнике ABM углы при основании AM равны по 80°, поэтому

$$\angle CAM = \angle AMD - \angle ACB = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ = \angle ACM.$$

Кроме того,

$$\angle ADM = \angle ABC + \angle BAD = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ = \angle AMD.$$

Значит, треугольники AMC и AMD равнобедренные. Следовательно, $BC - AB = BC - BM = CM = AM = AD = 2$.

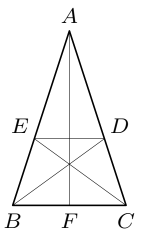


Рис. 135

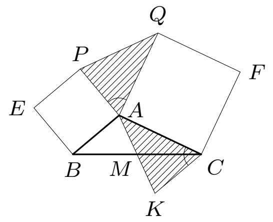


Рис. 136

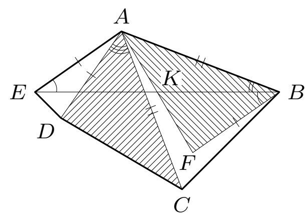


Рис. 137

1.159. *Указание.* Пусть ABC — искомый треугольник (рис. 135), $AB = AC$, AF, BD и CE — его биссектрисы. Тогда $DE \parallel BC$, $AF \perp BC$ и $BE = DE = CD$.

1.160. Пусть AP и AQ — указанные стороны квадратов $APEB$ и $AQFC$, AM — медиана треугольника ABC, $\angle BAC = \alpha$ (рис. 136). Отложим на продолжении медианы AM за точку M отрезок MK, равный отрезку AM. Тогда

$$CK = AB = AP, \qquad AC = AQ, \qquad CK \parallel AB,$$
$$\angle PAQ = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha = \angle KCA.$$

Поэтому треугольники ACK и QAP равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AK = PQ$ и $AM = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}PQ$.

1.161. Отложим на продолжении медианы AK за точку K отрезок KF, равный AK (рис. 137). Из равенства треугольников BKF и EKA следует, что $BF = AE = AD$ и $\angle KBF = \angle KEA$. Поэтому $\angle ABF = \angle ABK + \angle KBF = \angle DAC$. Кроме того, $AB = AC$ (по условию). Поэтому треугольники ABF и CAD равны. Следовательно, $CD = AF = 2AK$.

1.162. 36°, 36°, 108°. ▮ Пусть A — вершина равнобедренного треугольника ABC, а его биссектриса AM вдвое меньше биссектрисы BD (рис. 138). На продолжении биссектрисы AM за точку M отложим отрезок MK, равный AM. Тогда $BK \parallel AD$ и $AK = 2AM = BD$. Если P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, то $BP = KP$ (см. задачу **1.127**). Обозначим $\angle ABP$ через α. Тогда $\angle PKB = \angle PBK = 3\alpha$. Поскольку $BK = AB$, то $\angle BAK = \angle AKB = \angle PKB = 3\alpha$.

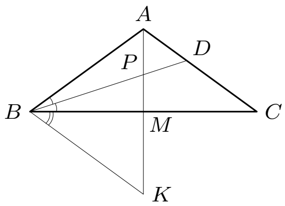


Рис. 138

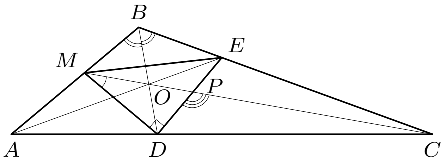


Рис. 139

Из прямоугольного треугольника AMB находим, что

$$\angle BAK = \angle BAM = 90^\circ - \angle ABM = 90^\circ - 2\alpha.$$

Из уравнения $3\alpha = 90^\circ - 2\alpha$ находим, что $\alpha = 18^\circ$. Следовательно, $\angle ABC = 36^\circ$.

1.163. В задаче **1.83** доказано, что DE — биссектриса угла BDC и $\angle EDM = 90^\circ$ (рис. 139). Если P — точка пересечения отрезков DE и CM, то P — точка пересечения биссектрис треугольника BDC. Поэтому $\angle DPC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle DBC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$, а так как $\angle DPC$ — внешний угол прямоугольного треугольника MDP, то

$$\angle DMO = \angle DPC - \angle MDP = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ.$$

§ 1.4

1.166. 60°.

1.167. *Указание.* Примените теорему о внешнем угле треугольника.

1.168. R. **1.170.** а) 90°; б) 120°.

1.172. Обозначим $\angle ACD = \alpha$ (рис. 140). Тогда

$$\angle BOC = \angle BCO = \alpha,$$
$$\angle OAB = \angle ABO = \angle BCO + \angle BOC = 2\alpha,$$
$$\angle AOD = \angle OAC + \angle ACO = 2\alpha + \alpha = 3\alpha.$$

1.173. *Указание.* Опустите перпендикуляр из центра окружности на данную прямую.

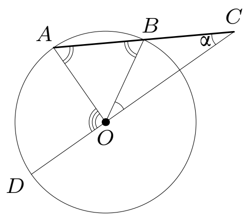


Рис. 140

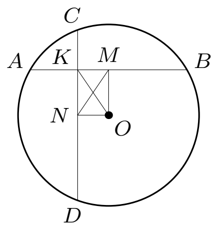


Рис. 141

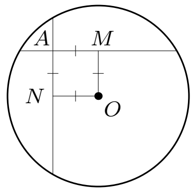


Рис. 142

1.174. *Указание.* Опустите перпендикуляры из центра окружности на данные хорды.

1.175. 24. *Указание.* Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.

1.176. *Указание.* Пусть O — центр окружности, AB и CD — данные хорды, M и N — их середины, K — точка пересечения хорд (рис. 141). Докажите равенство прямоугольных треугольников KOM и NMO.

1.177. $\frac{1}{2}(b-a)$. ▮ Пусть N и M — основания перпендикуляров, опущенных из центра O окружности на данные хорды, A — точка пересечения хорд (рис. 142). Тогда N и M — середины хорд, а все стороны четырехугольника $OMAN$ равны (это квадрат). Следовательно,

$$ON = AM = \frac{1}{2}(a+b) - a = \frac{1}{2}(b-a).$$

1.178. Окружность, концентрическая данной.

1.179. *Указание.* Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

1.180$^{\mathbf{0}}$. Окружность с диаметром AB без точек A и B.

1.182. *Указание.* Отрезок BC виден из точек M и N под прямым углом.

1.183. 8. **1.184.** 8 и 6.

1.185. Так как $AC \parallel BD$, то $\angle BAC = \angle ABD$, поэтому прямоугольные треугольники ABC и BAD равны по гипотенузе и острому углу (рис. 143). Значит, $AC = BD$. Кроме того,

$$\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \angle CAB + \angle ABC = 90^\circ,$$

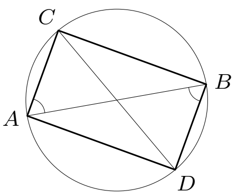


Рис. 143

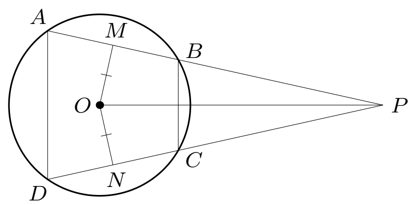


Рис. 144

значит, CD — диаметр.

1.186. *Указание.* Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

1.187. 1.

1.188. *Указание.* Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является также медианой.

1.189. *Указание.* Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является также медианой.

1.190. *Указание.* Если высота треугольника является также медианой, то треугольник равнобедренный.

1.191. 60°.

1.192. Перпендикуляры OM и ON (рис. 144), опущенные из центра O окружности на равные хорды AB и CD соответственно, равны и делят эти хорды пополам, поэтому прямоугольные треугольники POM и PON равны по катету и гипотенузе, значит, $PM = PN$. Следовательно,

$$PA = PM + MA = PM + \frac{1}{2}AB = PN + \frac{1}{2}CD = PN + ND = PD$$

и

$$PB = PA - AB = PD - CD = PC.$$

1.193. 25°.

1.194. *Указание.* Прямоугольные треугольники AMD и AND равны.

1.195. Точка пересечения биссектрис треугольника ABC.

1.196. 36°, 36°, 108°. ▮ Пусть O и Q — соответственно центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC (рис. 145), причем O и Q симметричны относительно прямой BC. Обозначим $\angle OBC = \angle QBC = \alpha$. Поскольку треугольник BOC равнобедренный, то $\angle QCB = \angle OCB = \angle OBC = \alpha$,

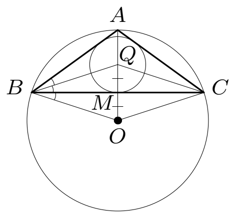


Рис. 145

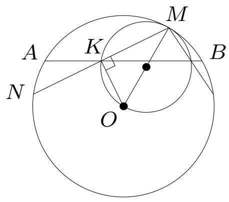


Рис. 146

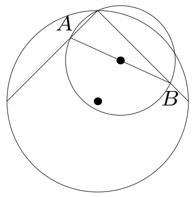


Рис. 147

а так как BQ — биссектриса угла ABC, то $\angle ABC = 2\alpha$. Аналогично, $\angle ACB = 2\alpha$. Значит, треугольник ABC равнобедренный, его биссектриса AM является высотой, а точки Q и M лежат на отрезке OA. Поскольку треугольник AOB также равнобедренный ($OA = OB$ как радиусы одной окружности), то $\angle OBA = \angle OAB$, или $90^\circ - 2\alpha = 3\alpha$. Откуда находим, что $\alpha = 18^\circ$. Следовательно, $\angle ACB = \angle ABC = 2\alpha = 36^\circ$.

1.197. *Указание.* Эта точка — основание высоты, проведенной из вершины A.

1.198. 45°, 45°, 90°.

1.199. 30°, 60°. *Указание.* Проведите медиану из вершины прямого угла.

1.200. *Указание.* $BK \perp MN$.

1.201. Окружность, построенная на отрезке с концами в данных точках как на диаметре.

1.202. Пусть M — данная точка окружности с центром O (рис. 146), AB — данная хорда. Если AB — диаметр, то искомая хорда — также диаметр. Если AB — хорда, не являющаяся диаметром, MN — искомая хорда, а K — ее середина, то $OK \perp MN$, т. е. радиус OM виден из точки K под прямым углом, значит, середина искомой хорды MN лежит на окружности с диаметром OM.

1.203. *Указание.* Пусть A и B — данные точки внутри данной окружности (рис. 147). Поскольку отрезок AB виден из вершины прямого угла искомого прямоугольного треугольника под прямым углом, эта вершина лежит на окружности с диаметром AB.

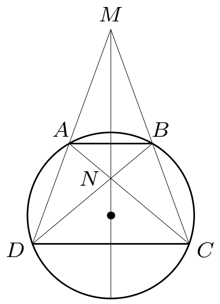


Рис. 148

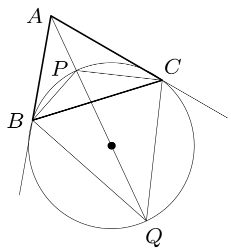


Рис. 149

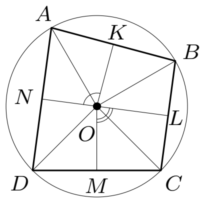


Рис. 150

1.204. *Указание.* Вершина прямого угла искомого прямоугольного треугольника лежит на окружности, диаметр которой — данная гипотенуза.

1.205. *Указание.* Пусть AB и CD — данные хорды (рис. 148). Если прямые AD и BC пересекаются в точке M, а прямые AC и BD — в точке N, то прямая MN делит каждую из данных хорд пополам.

1.206. *Указание.* Используйте построение из предыдущей задачи.

1.207. *Указание.* Перпендикуляр, опущенный из центра искомой окружности на сторону угла, есть катет прямоугольного треугольника с данными катетом (половина данного отрезка) и гипотенузой (данный радиус).

1.208. *Указание.* Центр искомой окружности — точка пересечения биссектрис треугольника.

1.209. *Указание.* Поскольку окружность высекает на сторонах угла равные отрезки, центр окружности равноудален от сторон угла, а так как окружность проходит через две данные точки, ее центр равноудален от этих точек.

1.210. *Указание.* Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC (рис. 149), а Q — точка пересечения биссектрис внешних углов при вершинах B и C. Тогда отрезок PQ виден из точек B и C под прямым углом.

1.211. *Указание.* OK, OL, OM и ON — биссектрисы равнобедренных треугольников AOB, BOC, COD и DOA, проведенные к основаниям (рис. 150).

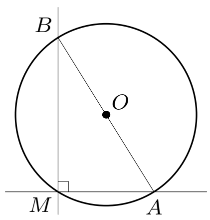


Рис. 151

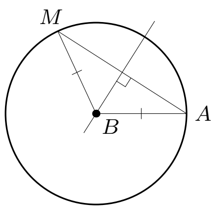


Рис. 152

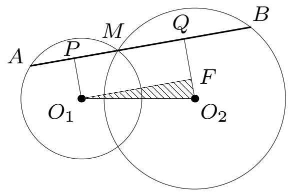


Рис. 153

1.212. Пусть M — данная точка на данной прямой (рис. 151). С центром в произвольной точке O, не лежащей на данной прямой, проведем окружность радиусом OM. Пусть A — отличная от M точка пересечения этой окружности с данной прямой, AB — диаметр окружности. Тогда BM — искомая прямая.

1.213. Окружность с центром B и радиусом BA. *Указание.* Если точка M симметрична точке A относительно некоторой прямой (рис. 152), проходящей через точку B, то $MB = BA$.

1.214⁰. Предположим, что нужная секущая построена (рис. 153). Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, r и R — их радиусы ($r < R$), M — общая точка этих окружностей, A и B — концы секущей (A на первой окружности, B — на второй), проходящей через точку M, $AB = a$ — данный отрезок. Пусть P и Q — проекции точек O_1 и O_2 на прямую AB. Тогда P и Q — середины хорд AM и BM данных окружностей. Если F — проекция точки O_1 на прямую O_2Q, то в прямоугольном треугольнике O_1FO_2 известен катет: $O_1F = PQ = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$. Отсюда вытекает следующий способ построения. Строим прямоугольный треугольник O_1FO_2 по гипотенузе O_1O_2 и катету $O_1F = \frac{1}{2}a$ и через точку M проводим прямую, параллельную O_1F.

1.215. Пусть M — общая точка окружностей с центрами O_1 и O_2 (рис. 153); прямая, проходящая через точку M, пересекает окружности в точках A и B соответственно. Если P и Q — проекции точек O_1 и O_2 на эту прямую, то P — середина AM, а Q — середина BM. Тогда

$$PQ = \frac{1}{2}AM + \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}AB$$

и $PQ \leqslant O_1O_2$, причем равенство достигается, если прямая AB перпендикулярна общей хорде двух окружностей.

1.216. *Указание.* Окружности, построенные как на диаметрах на соседних сторонах четырехугольника, пересекаются на его диагонали, а их общая хорда перпендикулярна этой диагонали.

1.217. *Указание.* Если внутренняя точка четырехугольника не лежит ни в одном круге, то все стороны четырехугольника видны из нее под острым углом.

1.218. Предположим, что искомые точки X и Y построены (рис. 154). Тогда $\angle AXB = 90°$. Поэтому $XB \parallel YC$. Пусть M — точка пересечения отрезка XY с диаметром AB. Прямоугольные треугольники XMB и YMC равны (по катету и острому углу). Следовательно, $CM = MB$, т. е. M — середина отрезка BC.

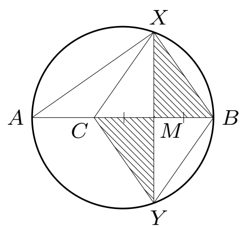


Рис. 154

1.219. *Указание.* Постройте точку, симметричную данному центру O относительно прямой AB.

§ 1.5

1.222. 60°, 60°, 60°. **1.223.** 30°, 30°, 120°.

1.224. *Указание.* Проведите радиус в точку касания.

1.226. 80°.

1.227. *Указание.* AC — катет прямоугольного треугольника OAC, лежащий против угла в 30°.

1.228$^{\mathbf{0}}$. *Указание.* Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла.

1.229. *Указание.* Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

1.230. 60°, 60°, 60°.

1.231$^{\mathbf{0}}$. $2R$. *Указание.* Примените теорему о равенстве отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки.

1.232. *а*. *Указание.* Примените теорему о равенстве отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки.

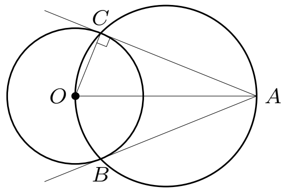


Рис. 155

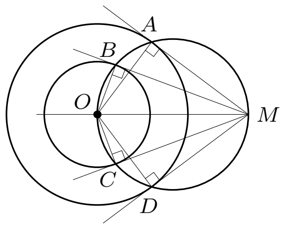


Рис. 156

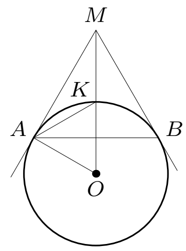


Рис. 157

1.233. *а. Указание.* Примените теорему о равенстве отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки.

1.234. *Указание.* Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен хорде AB.

1.235. *Указание.* $\angle ACO = 90^\circ$ (рис. 155).

1.236. *Указание.* Отрезок MO виден из точек A, B, C и D под прямым углом (рис. 156).

1.237⁰. *Указание.* Если точка A лежит вне окружности с центром O, то отрезок AO виден из искомой точки касания под прямым углом (рис. 155).

1.238. *Указание.* Центр вписанной в треугольник окружности лежит на перпендикуляре к стороне треугольника, проведенном через точку касания.

1.239. *Указание.* Через центр данной окружности проведите прямую, перпендикулярную данной прямой.

1.240. $1 : 3$, считая от точки O. *Указание.* В прямоугольном треугольнике AMO катет OA равен половине гипотенузы OM (рис. 157). Если K — середина OM, то треугольник AOK равносторонний.

1.241. 30°, 60°. *Указание.* Треугольник ADC равносторонний.

1.242. *Указание.* Геометрическое место середин хорд окружности, равных данному отрезку, — окружность, концентрическая данной. Далее см. задачу **1.239**.

1.243. *Указание.* Радиус данной окружности, проведенный в точку D, перпендикулярен данной прямой.

1.244. *Указание.* Если точки A, B и C лежат на окружности, причем $AC = BC$, то прямая, проходящая через точку C параллельно AB, — касательная к окружности.

1.245. $\frac{1}{2}(a - c + b)$, $\frac{1}{2}(a + c - b)$. *Указание.* Обозначьте один из искомых отрезков через x и примените теорему о равенстве отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки.

1.246. $\frac{1}{2}(e - d + c - b + a)$, $\frac{1}{2}(a - e + d - c + b)$. *Указание.* Обозначьте один из искомых отрезков через x и примените теорему о равенстве отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки.

1.247. $125°$. *Указание.* Треугольник AOD равнобедренный.

1.248. *Указание.* Треугольник AOD равнобедренный.

1.249. *Указание.* Центр вписанной окружности треугольника лежит на биссектрисе данного угла.

1.250. *Указание.* Искомая точка на прямой удалена от центра окружности на расстояние, равное гипотенузе прямоугольного треугольника, один катет которого равен радиусу окружности, а второй — данному отрезку.

1.251. *Указание.* Искомая точка принадлежит окружностям, соответственно концентрическим данным.

1.252^0. Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны между собой. Точки касания делят каждую сторону четырехугольника на две части. Обозначим последовательно их длины, используя одну букву для равных отрезков, начиная от какой-нибудь из вершин: a, b, b, c, c, d, d, a (рис. 158). Ясно, что суммы противоположных сторон состоят из одинаковых слагаемых.

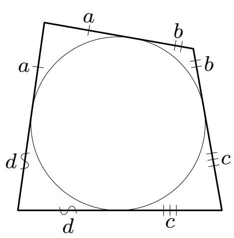


Рис. 158

1.253. *Указание.* Опустите перпендикуляры из центра окружности на указанные хорды.

1.254. *Указание.* Примените теорему о равенстве отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки.

1.255. $\frac{1}{2}(b - a)$. ▌ Сумма периметров отсеченных треугольников равна периметру данного треугольника (рис. 159).

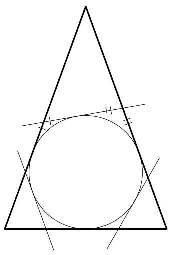


Рис. 159

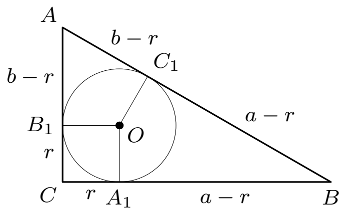


Рис. 160

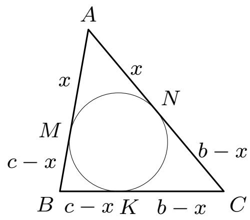


Рис. 161

Поэтому сумма боковых сторон равна $b - a$. Тогда каждая боковая сторона равна $\frac{1}{2}(b-a)$.

1.256. 55°. **1.257.** $180^\circ - \alpha$.

1.258⁰. Обозначим вершины треугольника, противолежащие сторонам a, b, c, через A, B, C соответственно, а точки касания — через A_1, B_1, C_1 (рис. 160). Если O — центр данной окружности, то OA_1CB_1 — квадрат. Поэтому

$$CA_1 = r, \qquad BC_1 = BA_1 = a - r, \qquad AC_1 = AB_1 = b - r,$$
$$c = AB = AC_1 + C_1B = a + b - 2r.$$

Следовательно, $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

1.259. *Указание.* Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

1.260⁰. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AC через K и N соответственно (рис. 161). Пусть $AC = b$ и $AB = c$. Тогда

$$BK = BM = AB - AM = c - x,$$
$$CK = CN = AC - AN = b - x,$$
$$BC = BK + CK = c - x + b - x = b + c - 2x.$$

Следовательно, $x = \frac{1}{2}(b + c - a) = \frac{1}{2}(b + c + a) - a = p - a$.

1.261. 1. *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи **1.260⁰**.

1.262. 2. *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи **1.260⁰**.

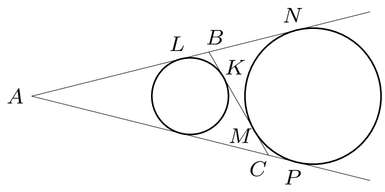


Рис. 162

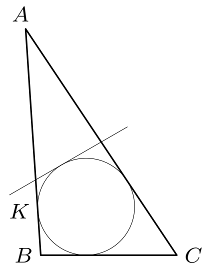


Рис. 163

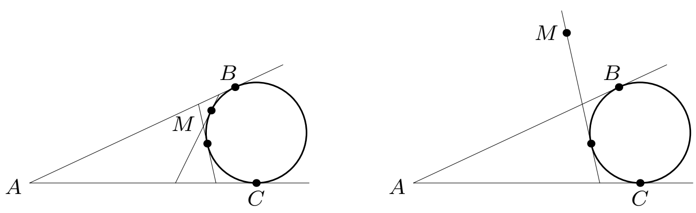
1.263$^{\mathbf{0}}$. а) Пусть p — полупериметр треугольника ABC (рис. 162). Тогда

$$AN + AP = AB + BN + AC + CP = AB + BM + AC + CM = \\ = AB + AC + (BM + CM) = AB + AC + BC = 2p$$

и $AN = AP$, поэтому $AN = p$. б) Так как $BK = p - AC$ (см. задачу **1.260$^{\mathbf{0}}$**) и $CM = CP = AP - AC = p - AC$, то $BK = CM$. в) $NL = AN - AL = p - (p - BC) = BC$.

1.264. 16. ▮ Пусть K — точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 163), со стороной AB ($AB = 10$, $AC = 12$, $BC = 6$). Если p — полупериметр треугольника, то $AK = p - BC = 14 - 6 = 8$ (см. задачу **1.260$^{\mathbf{0}}$**), а AK равно полупериметру отсеченного треугольника.

1.265. Пусть M — точка внутри данного угла (рис. 164, *а*), A — вершина угла, $2p$ — данный периметр. Отложим на сторонах данного угла точки B и C так, что $AB = AC = p$. Впишем в угол окружность, касающуюся его сторон в точках B и C, и



а) *б*)

Рис. 164

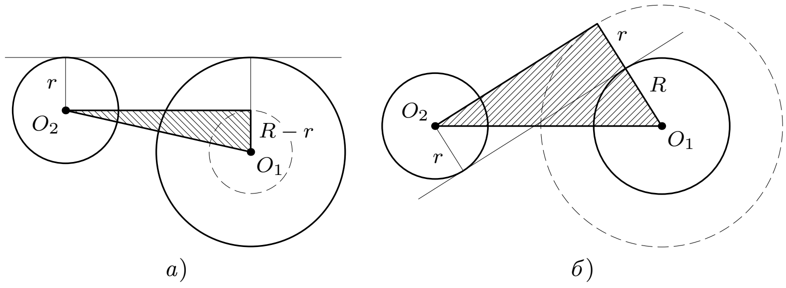


Рис. 165

проведем через точку M касательные к этой окружности (если это возможно).

Если точка M расположена вне угла (рис. 164, *б*), то искомая прямая — это касательная к построенной окружности, проходящая через точку M и отсекающая от данного угла треугольник, для которого построенная окружность — вневписанная.

1.266. *Указание.* Общие внешние (внутренние) касательные к двум окружностям симметричны друг другу относительно линии центров.

1.267⁰. *Указание.* Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов R и r. Задача сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе O_1O_2 и катету $R-r$ (рис. 165, *а*) или $R+r$ (рис. 165, *б*).

1.268⁰. Предположим, что точка касания не лежит на линии центров. Тогда точка, симметричная точке касания относительно линии центров, также принадлежит обеим окружностям, что противоречит условию.

1.269. Пусть M — единственная общая точка окружностей с центрами O_1 и O_2 (рис. 166). Точка M лежит на прямой O_1O_2 (см. задачу **1.268⁰**). Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно O_1O_2, является касательной к каждой из окружностей.

Пусть теперь окружности с центрами O_1 и O_2 касаются некоторой прямой l в точке M. Тогда радиусы O_1M и O_2M перпендикулярны l, значит, точка M лежит на прямой O_1O_2. Предположим, что окружности имеют еще одну общую точку K, отличную от M. Тогда точка, симметричная точке K

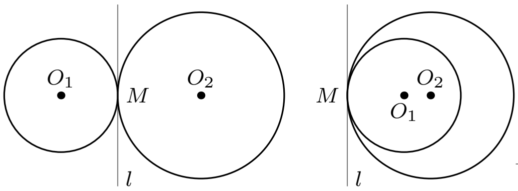


Рис. 166

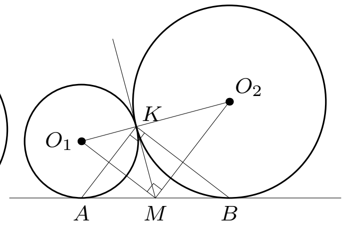


Рис. 167

относительно прямой O_1O_2, также принадлежит обеим окружностям, что невозможно, так как две различные окружности не могут иметь три общие точки.

1.270. Верно. ▌ Пусть сумма радиусов r и R двух окружностей равна расстоянию между их центрами O_1 и O_2 (рис. 166). Тогда точка M отрезка O_1O_2, удаленная от точки O_1 на расстояние r, удалена на расстояние R от точки O_2, значит, M — общая точка окружностей. Если K — еще одна общая точка этих окружностей, то $O_1O_2 < O_1K + O_2K = r + R$, что невозможно. Остальное аналогично.

1.272. O_1MO_2 — угол между биссектрисами смежных углов, поэтому $\angle O_1MO_2 = 90°$ (рис. 167). Поскольку $MA = MK = MB$, точка K лежит на окружности с диаметром AB, следовательно, $\angle AKB = 90°$.

1.273. $3r$. ▌ Пусть R — радиус большей окружности (рис. 168). Опустим перпендикуляр из центра меньшей окружности на радиус большей окружности, проведенный в точку касания с одной из сторон данного угла. Получим прямоугольный треугольник с гипотенузой $R + r$, катетом $R - r$ и острым углом, равным $30°$, противолежащим этому катету. Тогда $R + r = 2(R - r)$. Отсюда находим, что $R = 3r$.

1.274. $1 : 3$.

1.275⁰. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей (рис. 169). Тогда точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Треугольники O_1AB и O_2AC — равнобедренные, поэтому $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2$, значит, прямая O_1B параллельна прямой CO_2. Следовательно, параллельны и перпендикулярные к ним касательные.

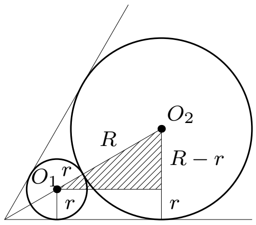


Рис. 168

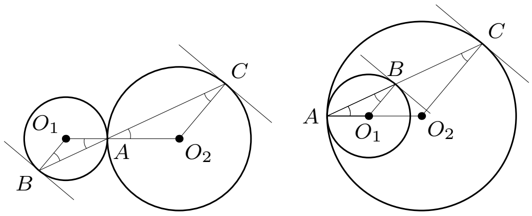


Рис. 169

1.276. Предположим, задача решена. Пусть построенная окружность с центром O_2 касается данной прямой l в точке C, а данной окружности с центром O_1 — в данной на ней точке A (рис. 170).

Первый способ. Пусть прямая AC вторично пересекает данную окружность в точке B. Тогда касательная, проведенная к этой окружности в точке B, параллельна прямой l, а точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Отсюда вытекает следующий способ построения. Проведем касательную к данной окружности, параллельную данной прямой l. Пусть B — точка касания, а прямая AB пересекает прямую l в точке C. Тогда центр O_2 искомой окружности найдем как точку пересечения перпендикуляра к прямой l, восставленного из точки C, и прямой O_1A.

Второй способ. Пусть касательная к данной окружности, проведенная через точку A, пересекает данную прямую в точке M. Тогда искомая окружность касается прямой AM в точке A, а ее центр O_2 лежит на биссектрисе угла AMC или на биссектрисе смежного с ним угла. Отсюда вытекает соответствующий способ построения.

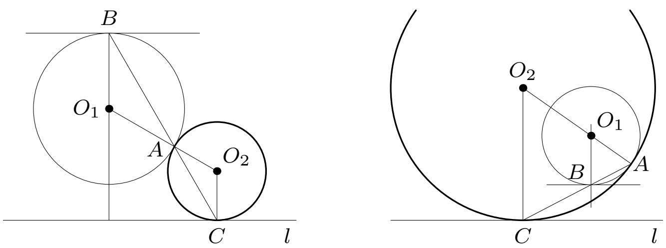


Рис. 170

Если данная окружность не имеет с прямой l общих точек и данная точка не лежит на перпендикуляре к данной прямой, проходящем через центр данной окружности, задача имеет два решения (внутреннее и внешнее касания).

1.277. $b + p$. ▌ Поскольку в четырехугольники $ABMQ$ и $ABNP$ вписаны окружности (рис. 171), $MQ+AB = \frac{1}{2}P_1$ и $AB+ + NP = \frac{1}{2}P_2$ (P_1 и P_2 — периметры этих четырехугольников). Поэтому

$$MQ - NP = \frac{1}{2}(P_1 - P_2) = p.$$

Отсюда находим, что $MQ = NP + p = b + p$.

1.278. Обозначим $AC_1 = AB_1 = x$, $BA_1 = BC_1 = y$, $CA_1 = = CB_1 = z$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (рис. 172). Тогда

$$x + z = b, \qquad x + y = c, \qquad z + y = a.$$

Из полученной системы уравнений находим, что $AB_1 = x = = \frac{1}{2}(b + c - a) = p - a$, т.е. точка B_1 совпадает с точкой касания вписанной окружности со стороной AC (см. задачу $\mathbf{1.260^0}$). Аналогично для точек A_1 и C_1.

1.279. *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи **1.278**.

1.280. Рассмотрим случай внешнего касания (рис. 173). Предположим, что окружности S_1, S_2 и S_3 построены. Пусть S_1 и S_2 касаются в точке C, S_1 и S_3 — в точке B, S_2 и S_3 — в точке A. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры окружностей S_1, S_2 и S_3 соответственно. Тогда точки A, B и C лежат на сторонах треугольника $O_1O_2O_3$, причем $O_1B = O_1C$, $O_2C = O_2A$, $O_3A = O_3B$. Из задачи **1.278** следует, что точки A, B и C

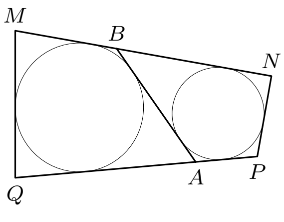


Рис. 171

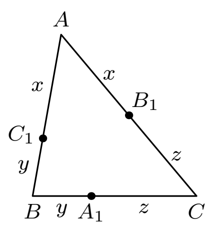


Рис. 172

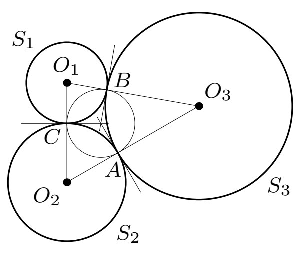


Рис. 173

являются точками касания вписанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$ с его сторонами.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Строим описанную окружность треугольника ABC и проводим к ней касательные в точках A, B и C. Точки пересечения этих касательных есть центры искомых окружностей. Если каждая из двух окружностей, касающихся между собой внешним образом, внутренне касается третьей окружности, то аналогично можно доказать, что точки их попарного касания являются точками касания прямых, содержащих стороны треугольника $O_1O_2O_3$, с вневписанной окружностью этого треугольника.

1.281⁰. *Первый способ.* Пусть $AB + CD = BC + AD$ и прямые AB и CD пересекаются в точке M. Впишем окружность в треугольник AMB. Пусть она полностью содержится в четырехугольнике $ABCD$ (рис. 174, *а*). Докажем, что она касается BC. Если это не так, то проведем через точку B касательную к окружности, пересекающую CD в точке C_1. Тогда

$$AB + CD = BC + AD \quad \text{и} \quad AB + C_1D = BC_1 + AD.$$

Вычитая почленно эти равенства, получим $CC_1 + BC_1 = BC$, что невозможно. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Второй способ. Пусть $AB + CD = BC + AD$. Тогда $AB - AD = BC - CD$. Рассмотрим случай, когда $AB > AD$ (рис. 174, *б*). Тогда $BC > CD$.

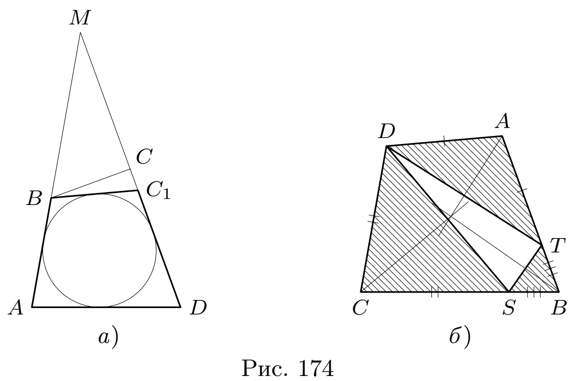


Рис. 174

На отрезке AB возьмем такую точку T, чтобы $AT = AD$, а на отрезке BC — такую точку S, чтобы $CS = CD$. Тогда треугольники TBS, ADT и CDS равнобедренные. Биссектрисы их углов при вершинах B, A и C являются серединными перпендикулярами к отрезкам TS, DT и DS соответственно, т. е. серединными перпендикулярами к сторонам треугольника DTS. Поэтому биссектрисы углов B, A и C пересекаются в одной точке — центре описанной окружности треугольника DTS. Эта точка равноудалена от всех сторон четырехугольника $ABCD$. Следовательно, она является центром вписанной окружности четырехугольника $ABCD$. Аналогично для $AB < AD$. Если же $AB = AD$, то утверждение очевидно.

§ 1.6

1.282. Два луча.

1.283. Серединный перпендикуляр к данному основанию без середины основания.

1.284. Серединный перпендикуляр к отрезку с концами в данных точках.

1.285. Окружность с центром в данной точке и радиусом, равным данному.

1.291. Две прямые, параллельные данной и удаленные от нее на расстояние, равное данному радиусу.

1.295. Две прямые, параллельные данной.

1.297. Круг, ограниченный данной окружностью, без точек данной окружности.

1.298. Диаметр данной окружности, перпендикулярный данной прямой (без концов).

1.299. Окружность, концентрическая данной.

1.303. Биссектриса угла.

1.304. *Указание.* Пусть прямые пересекаются. Центр искомой окружности лежит на биссектрисе угла, образованного этими прямыми, а также на перпендикуляре к прямой, проходящем через данную на ней точку.

1.305. Четыре точки: одна из них — центр вписанной

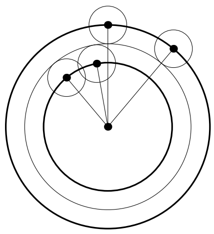


Рис. 175

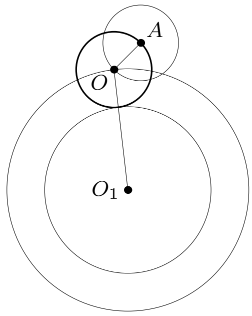


Рис. 176

окружности треугольника, остальные — точки пересечения биссектрис внешних углов.

1.306. *Указание.* Центры искомых окружностей лежат на биссектрисах вертикальных углов, образованных данными прямыми.

1.307. Прямая, проходящая через данную точку и центр данной окружности (без данной точки).

1.308. *Указание.* Расстояние между центрами касающихся окружностей равно сумме или разности их радиусов.

1.309. Одна или две окружности, концентрические данной. ▌ Поскольку линия центров двух касающихся окружностей проходит через их точку касания, то искомое геометрическое место точек представляет собой две окружности, концентрические данной. Радиусы этих окружностей равны сумме и разности данных радиусов (рис. 175).

1.310. *Указание.* Пусть данная точка A лежит вне данной окружности с центром O_1, а искомая окружность с центром O касается данной внешним образом (рис. 176). Тогда точка O лежит на окружности с центром O_1 и радиусом, равным сумме данных радиусов, а также на окружности с центром A и радиусом, равным данному радиусу искомой окружности.

1.311. *Указание.* Если искомая окружность касается данной внешним образом, то ее центр лежит на окружности, концентрической данной, с радиусом, равным сумме данных радиусов, если же внутренним — то разности. В то же время, центр искомой окружности лежит на прямой, параллельной данной и

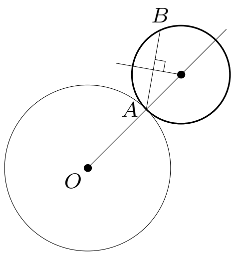


Рис. 177

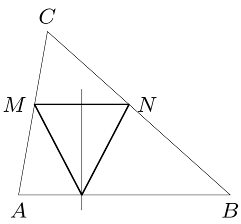


Рис. 178

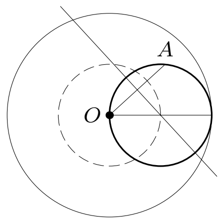


Рис. 179

удаленной от данной на расстояние, равное данному радиусу искомой окружности.

1.312. *Указание.* Диаметр искомой окружности равен расстоянию между данными параллельными прямыми.

1.313. *Указание.* Диаметр искомой окружности равен расстоянию между данными параллельными прямыми.

1.314. *Указание.* Центр искомой окружности лежит на окружностях, соответственно концентрических данным, и радиусы этих окружностей можно найти.

1.315. *Указание.* Радиус искомой окружности равен полусумме радиусов данных.

1.316. *Указание.* Пусть A — точка на данной окружности с центром O (рис. 177), а B — данная точка, не лежащая на этой окружности. Тогда центр искомой окружности лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB и на прямой OA.

1.317. *Указание.* Пусть прямая, проведенная параллельно стороне AB треугольника ABC (рис. 178) на расстоянии, равном данной высоте, пересекает стороны AC и BC в точках M и N. Тогда вершина искомого равнобедренного треугольника лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MN.

1.318. Окружность с диаметром AB (без точки B).

1.319. *Указание.* Центр искомой окружности лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AO (рис. 179), а также — на окружности с центром O и радиусом, равным половине радиуса данной окружности.

1.320. *Указание.* Пусть ABC — искомый треугольник (рис. 180), AB — его данная сторона, AH — данная высота, O —

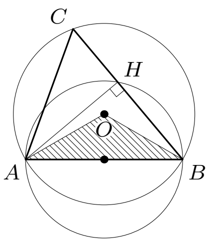


Рис. 180

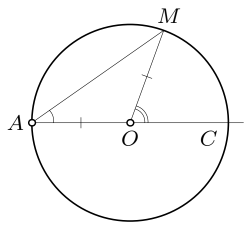


Рис. 181

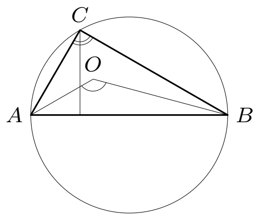


Рис. 182

центр описанной окружности, R — ее радиус. Тогда точка O — вершина равнобедренного треугольника с данными сторонами AB и $OA = OB = R$, а точка H лежит на окружности с диаметром AB.

1.321. *Указание.* Если прямые, соответственно параллельные сторонам угла и расположенные на равных расстояниях от его сторон, пересекаются внутри угла, то точка их пересечения лежит на биссектрисе данного угла.

1.322. Окружность без одной точки. *Указание.* Пусть отрезок AM делится пополам некоторой точкой K данной окружности. На продолжении диаметра AB данной окружности за точку B отложите отрезок BC, равный AB. Треугольник ABM равнобедренный, так как его медиана BK является высотой.

1.323. *Указание.* Биссектриса есть ось симметрии угла.

1.324. Окружность с центром O и радиусом OA (без точки A) и луч OC (без точки O). ▮ Если точка M из искомого геометрического места точек не лежит на прямой AO (рис. 181), то из теоремы о внешнем угле треугольника следует, что треугольник AOM — равнобедренный ($MO = OA$). Поэтому точка M лежит на окружности с центром O и радиусом OA. Обратно, для любой точки M окружности с центром O и радиусом OA, отличной от A, $\angle MOC = 2\angle MAC$. Если точка M, отличная от O, лежит на луче OC, то

$$\angle MOC = 2\angle MAC.$$

1.325. *Указание.* Если O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC (рис. 182) и $\angle AOB = 135°$, то $\angle ACB = 90°$.

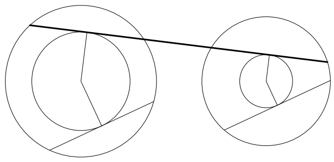


Рис. 183

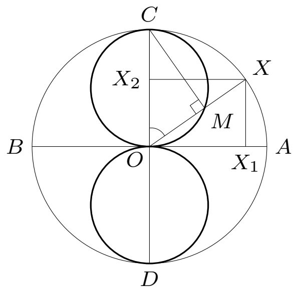


Рис. 184

1.326. а) Внешность круга, построенного на данном отрезке как на диаметре, без точек прямой, проходящей через данные точки; б) внутренность круга, построенного на данном отрезке как на диаметре, без точек прямой, проходящей через данные точки. *Указание.* Примените теорему о внешнем угле треугольника.

1.327. *Указание.* Равные хорды окружности касаются некоторой окружности, концентрической данной.

1.328. Геометрическое место середин равных хорд окружности есть окружность, концентрическая данной. Радиус этой окружности равен расстоянию от центра данной окружности до одной из таких хорд. Отсюда вытекает следующее построение. Впишем в первую окружность произвольную хорду, равную данному отрезку (рис. 183). Построим окружность, концентрическую данной, с радиусом, равным расстоянию от центра до середины построенной хорды. Аналогично для второй окружности. Тогда каждая общая касательная к двум построенным окружностям есть искомая прямая. Задача может иметь не более четырех решений.

1.329. *Указание.* Через данную на одной из окружностей точку проведите касательную к этой окружности. Теперь задача сводится к построению окружности, касающейся данной окружности и данной прямой в данной на ней точке (пример 4 из §1.5, с. 35).

1.330. Две равные касающиеся окружности. ▮ Пусть CD — диаметр данной окружности, перпендикулярный данному диаметру AB (рис. 184), X — произвольная точка меньшей дуги AC, X_1 и X_2 — проекции точки X на AB и OC соответственно. Тогда $OC = OX$, $OM = XX_1 = OX_2$. Поэтому треугольники CMO и XX_2O равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle CMO = \angle XX_2O = 90^\circ$. Следовательно, точка M лежит на окружности с диаметром OC. Аналогично для любой другой точки данной окружности.

Пусть теперь M — произвольная точка окружности с диаметром OC. Пусть X — точка пересечения луча OM с исходной окружностью, X_1 и X_2 — проекции точки X на AB и OC соответственно. Тогда прямоугольные треугольники CMO и XX_2O равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $OM = OX_2 = XX_1$. Аналогично для любой точки окружности с диаметром OD.

1.331. *Указание.* См. пример 3 из §1.6, с. 43.

§ 1.7

1.333. Сторона, равная 1. **1.334.** Нет. **1.335.** Может. **1.336.** Нет. **1.340.** а) 3; б) 13. **1.341.** 6. **1.342.** 60°. **1.343.** BC.

1.344. *Указание.* Если хорда AB не является диаметром окружности с центром O (рис. 185), то для равнобедренного треугольника AOB верно неравенство $AB < OA + OB$.

1.346. а) Да; б) нет.

1.347. *Указание.* Если CD — высота прямоугольного треугольника ABC, проведенная к гипотенузе AB (рис. 186), то $\angle ACD = \angle ABC$ и $\angle BCD = \angle BAC$.

1.348. $AB > AC$. *Указание.* Если $\angle BAD > \angle CAD$ (рис. 187), то

$$\angle ABC = 90^\circ - \angle BAD < 90^\circ - \angle CAD = \angle ACB.$$

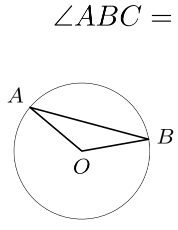


Рис. 185

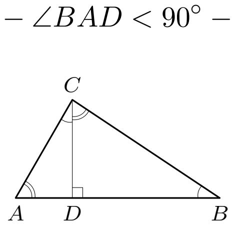


Рис. 186

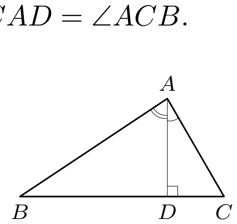


Рис. 187

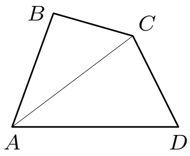


Рис. 188

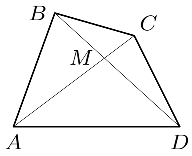


Рис. 189

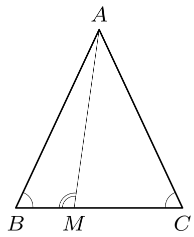


Рис. 190

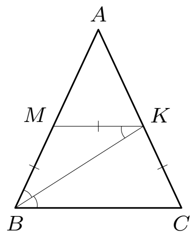


Рис. 191

1.349. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Тогда $a + b + c = a + (b + c) > a + a = 2a$, поэтому $a < \frac{1}{2}(a + b + c)$.

1.350. Пусть AC — диагональ четырехугольника $ABCD$ (рис. 188). Применяя неравенство треугольника к треугольникам ABC и ACD, получим $AC < AB + BC$ и $AC < AD + CD$. Сложив почленно эти неравенства, найдем

$$2AC < AB + BC + AC + CD,$$

откуда $AC < \frac{1}{2}(AB + BC + AC + CD)$.

1.351⁰. Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD данного четырехугольника $ABCD$ (рис. 189). Тогда $AB < AM + BM$ и $CD < CM + DM$. Сложив почленно эти неравенства, получим

$$AB + CD < AM + BM + CM + DM = \\ = (AM + CM) + (BM + DM) = AC + BD.$$

1.352. В точке пересечения диагоналей четырехугольника. *Указание.* Предположите, что искомая точка не лежит на одной из диагоналей, и примените неравенство треугольника.

1.353. *Указание.* Воспользуйтесь результатами задач **1.350** и **1.351⁰**.

1.354. Пусть M — точка на основании BC равнобедренного треугольника ABC, отличная от точек B и C (рис. 190). Тогда один из углов AMB и AMC прямой или тупой. Предположим, $\angle AMB > 90°$. Тогда это наибольший угол треугольника AMB, значит, $AM < AB$.

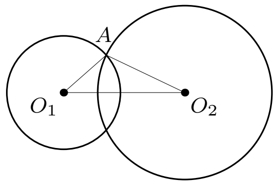


Рис. 192

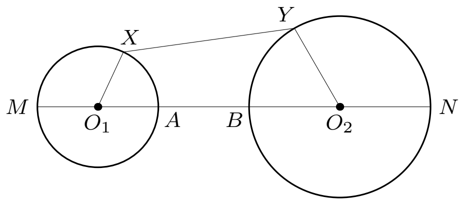


Рис. 193

1.355. Через точку K проведем прямую, параллельную основанию BC (рис. 191). Пусть M — ее точка пересечения с боковой стороной AB. Тогда $\angle BKM = \angle CBK = \angle ABK$, значит, треугольник BMK равнобедренный, $BM = MK = KC$. Следовательно, $2CK = BM + MK > BK$.

1.356⁰. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов r и R соответственно (рис. 192), A — одна из двух точек их пересечения. Для треугольника O_1AO_2 верны неравенства

$$O_1O_2 < O_1A + O_2A \quad \text{и} \quad AO_2 < O_1A + O_1O_2,$$

или

$$O_1O_2 < r + R \quad \text{и} \quad O_1O_2 > AO_2 - AO_1 = R - r.$$

1.357⁰. 3 и 13. ▌ Докажем, что кратчайшее расстояние между точками двух окружностей, лежащих одна вне другой, есть отрезок линии центров, заключенный между окружностями. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, а линия центров пересекает окружности в точках A и B, причем и A, и B лежат между O_1 и O_2 (рис. 193). Тогда, если X и Y — другие точки этих окружностей, то

$$XO_1 + XY + YO_2 > O_1O_2 = AO_1 + AB + BO_2.$$

Следовательно, $XY > AB$. Пусть AM и BN — диаметры окружностей, а X и Y — точки окружностей, отличные от M и N. Тогда

$$XY < XO_1 + O_1O_2 + YO_2 = MO_1 + O_1O_2 + NO_2 = MN.$$

В нашей задаче $AB = 3$ и $MN = 2 + 8 + 3 = 13$.

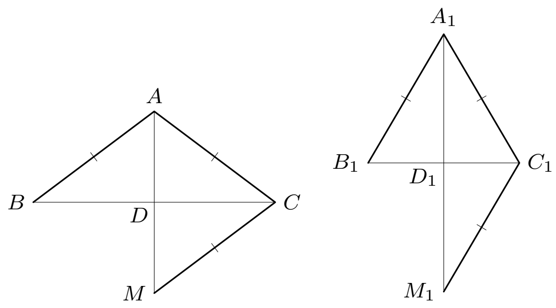


Рис. 194

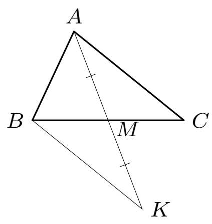


Рис. 195

1.358. *Указание.* Если O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, то $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$.

1.359. Нет.

1.360. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — равнобедренные треугольники с основаниями BC и B_1C_1 (рис. 194), причем $AB = AC = A_1B_1 = A_1C_1$ и $\angle A > \angle A_1$, а AD и A_1D_1 — их высоты.

На продолжениях AD и A_1D_1 за точки D и D_1 отложим отрезки DM и D_1M_1, соответственно равные AD и A_1D_1. Тогда в треугольниках ACM и $A_1C_1M_1$ известно, что $AC = A_1C_1$, $CM = C_1M_1$ и $\angle ACM < \angle A_1C_1M_1$. Значит, $AM < A_1M_1$. Следовательно, $AD < A_1D_1$.

1.361. *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи **1.360**.

1.362. *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи **1.360**.

1.363. *Указание.* Искомая хорда перпендикулярна радиусу, проходящему через данную точку (для доказательства воспользуйтесь утверждением задачи **1.362**).

1.364⁰. Отложим на продолжении медианы AM за точку M отрезок MK, равный AM (рис. 195). Тогда $CK = AB$. Применяя неравенство треугольника к треугольнику ABK, получим

$$2AM = AK < AB + BK = AB + AC$$

и

$$2AM = AK > AB - BK = AB - AC.$$

Отсюда следует, что $\frac{1}{2}(AB - AC) < AM < \frac{1}{2}(AB + AC)$.

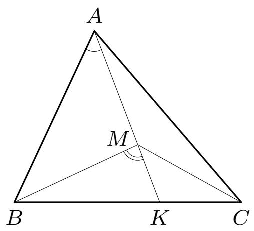


Рис. 196

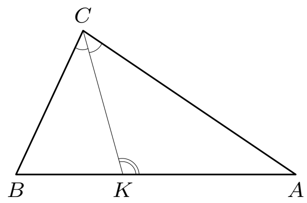


Рис. 197

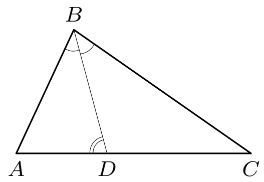


Рис. 198

1.365. Продолжим AM до пересечения со стороной BC в точке K (рис. 196). Тогда

$$\angle BMK = \angle BAM + \angle ABM > \angle BAM$$

и

$$\angle CMK = \angle CAM + \angle ACM > \angle CAM.$$

Следовательно,

$$\angle BMC = \angle BMK + \angle CMK > \angle BAM + \angle CAM = \angle BAC.$$

1.366. Поскольку угол B треугольника BCK (рис. 197) больше угла A треугольника ACK (против большей стороны AC треугольника ABC лежит больший угол), а углы BCK и ACK этих треугольников равны, то $\angle BKC < \angle AKC$, а так как это смежные углы, то угол AKC тупой.

1.367. Угол ADB — внешний угол треугольника BDC (рис. 198), поэтому $\angle ADB > \angle CBD = \angle ABD$, значит, в треугольнике ABD сторона AB больше стороны AD. Аналогично, $CB > CD$.

1.368. Отложим на продолжении медианы CD за точку D отрезок DC_1, равный DC (рис. 199). Тогда $AC_1 = BC$ и $\angle AC_1C = \angle BCD$. В треугольнике CAC_1 известно, что $AC > AC_1 = BC$. Следовательно,

$$\angle ACD = \angle ACC_1 < \angle AC_1C = \angle BCD.$$

1.369. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC (рис. 200) и $AB > BC$. Рассмотрим точку C_1, симметричную

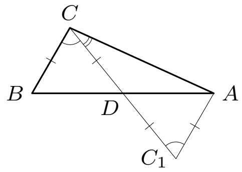


Рис. 199

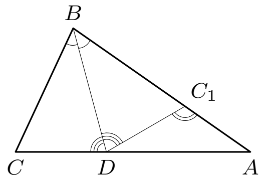


Рис. 200

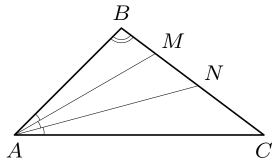


Рис. 201

вершине C относительно биссектрисы угла B. Тогда $CD = C_1D$. Поскольку $BC_1 = BC < AB$, точка C_1 лежит на отрезке AB, а AC_1D — внешний угол треугольника BDC_1, поэтому $\angle AC_1D > \angle BDC_1 = \angle BDC > \angle A$. Следовательно, $CD = C_1D < AD$.

1.370. *Указание.* Предположите противное и воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

1.371. В треугольнике ABN (рис. 201) угол B наибольший, поэтому $AN > AB$, а так как AM — биссектриса треугольника ABN, то $MN > BM$ (см. задачу $\mathbf{1.121^0}$). Неравенство $MN < NC$ доказывается аналогично.

1.372. *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи **1.368**.

1.373. Содержащая точку B полуплоскость, граница которой — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

1.374. Поскольку $\angle AMN = \angle MCN + \angle MNC > \angle C$, то угол AMN тупой (рис. 202). Следовательно, AN — наибольшая сторона треугольника AMN. Тогда $MN < AN$. Аналогично докажем, что AB — наибольшая сторона треугольника ANB. Поэтому $AN < AB$. Следовательно, $MN < AB$.

1.375. Пусть D — точка на стороне BC треугольника ABC (рис. 203). Один из углов ADB и ADC не меньше прямого. Пусть $\angle ADC > 90°$. Тогда это наибольший угол треугольни-

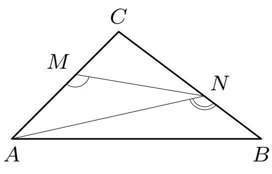


Рис. 202

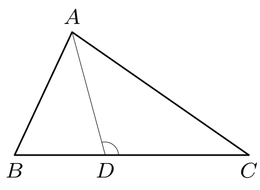


Рис. 203

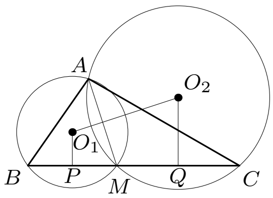


Рис. 204

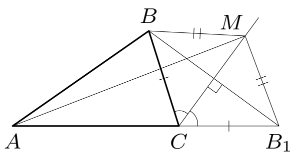


Рис. 205

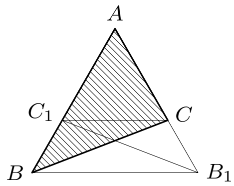


Рис. 206

ка ADC, значит, $AD < AC$. Если же $\angle ADB > 90°$, то аналогично докажем, что $AD < AB$.

1.376. *Указание.* Соедините одну из данных точек с противоположной вершиной треугольника и воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

1.377. $\frac{1}{2}a$. ▮ Проекции центров O_1 и O_2 данных окружностей на BC — середины P и Q отрезков BM и MC (рис. 204). Тогда $O_1O_2 \geqslant PQ = \frac{1}{2}a$.

Если AM — высота треугольника BAC, то $O_1O_2 = PQ = \frac{1}{2}a$. В остальных случаях $O_1O_2 > \frac{1}{2}a$.

1.378. Пусть B_1 — точка, симметричная точке B относительно прямой CM (рис. 205). Поскольку биссектриса есть ось симметрии угла, точка B_1 лежит на продолжении стороны AC за точку C, $CB_1 = CB$ и $MB_1 = MB$. Поэтому

$$MA + MB = MA + MB_1 > AB_1 = CA + CB_1 = CA + CB.$$

1.379. Если треугольник ABC равносторонний, то $AB + BC = 2BC$. Пусть $AB \neq AC$ (рис. 206). При симметрии относительно биссектрисы угла A вершина C переходит в точку C_1 луча AB, а вершина B — в точку B_1 луча AC. При этом

$$B_1C_1 = BC, \qquad CC_1 = AC, \qquad BB_1 = AB.$$

Следовательно,

$$2BC = BC + B_1C_1 > BB_1 + CC_1 = AB + AC$$

(см. задачу **1.351⁰**).

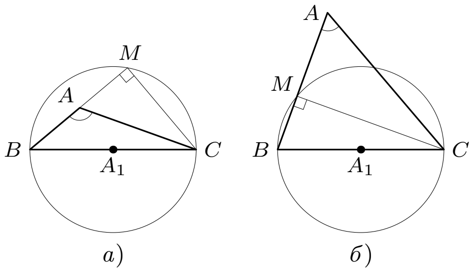


Рис. 207

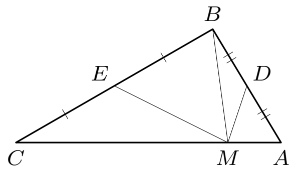


Рис. 208

1.380. Пусть $\angle BAC < 90°$. Докажем, что точка A лежит вне окружности с диаметром BC. Ясно, что точка A не может лежать на этой окружности, так как тогда $\angle BAC = 90°$. Предположим, что она внутри окружности (рис. 207, *а*), и продолжим отрезок BA до пересечения с окружностью в точке M. Тогда $\angle BAC > \angle BMC = 90°$, что невозможно. Значит, точка A лежит вне окружности. Следовательно, $AA_1 > \frac{1}{2}BC$.

Пусть $AA_1 > \frac{1}{2}BC$. Тогда точка A лежит вне окружности с диаметром BC. Если луч AB пересекает окружность в точке M (рис. 207, *б*), то $\angle BAC < \angle BMC = 90°$.

1.381. Поскольку ME — медиана треугольника BMC (рис. 208) и $ME > EC = \frac{1}{2}BC$, то угол BMC острый (см. задачу **1.380**). Значит, угол AMB тупой, следовательно, $MD < \frac{1}{2}AB = AD$.

1.382. *Указание.* Постройте окружность на другой диагонали как на диаметре.

1.383. Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD (рис. 209). В треугольниках AMD и AMB сторона AM — общая, $DM = MB$, а $AD < AB$. Поэтому $\angle AMD < \angle AMB$. Тогда $\angle BMC < \angle CMD$. В треугольниках BMC и CMD сторона CM общая, $DM = MB$, а $\angle BMC < \angle CMD$. Следовательно, $BC < DC$.

1.384$^{\mathbf{0}}$. Пусть N_1 — точка, симметричная точке N относительно прямой l (рис. 210). Тогда для любой точки K этой прямой

$$MK + NK = MK + N_1K \geqslant MN_1 = MP + PN_1 = MP + PN.$$

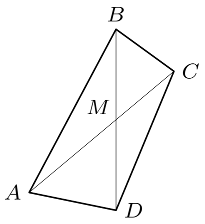


Рис. 209

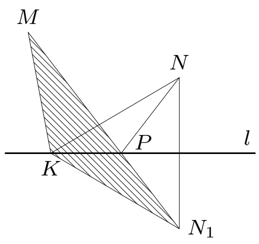


Рис. 210

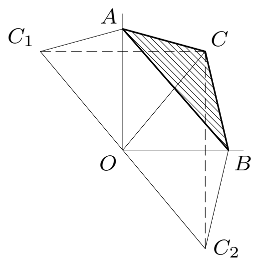


Рис. 211

Равенство достигается в случае, когда точка K совпадает с точкой P пересечения прямых l и MN_1.

1.385. *Указание.* Рассмотрите точки, симметричные точке M относительно сторон угла.

1.386. *Указание.* Рассмотрите точки, симметричные точкам M и N относительно сторон данного угла.

1.387. Пусть C_1 — точка, симметричная точке C относительно прямой OA (рис. 211), а C_2 симметрична C относительно прямой OB. Тогда точки C_1, O и C_2 лежат на одной прямой, так как

$$\angle C_1OC_2 = \angle C_1OC + \angle COC_2 = \\ = 2(\angle AOC + \angle COB) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.$$

Следовательно,

$$AC + BC + AB = AC_1 + BC_2 + AB > C_1C_2 = 2OC.$$

1.388. Пусть B_2 — точка, симметричная точке B относительно биссектрисы угла ACB (рис. 212). Тогда $BB_1 = B_2A_1$. Рассмотрим треугольник AB_2A_1. В этом треугольнике

$$\angle AB_2A_1 > \angle AB_2B = 180^\circ - \angle CB_2B = \\ = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle C) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C > 90^\circ.$$

Следовательно, $BB_1 = A_1B_2 < AA_1$.

1.389. Продолжим BM до пересечения со стороной AC в точке N (рис. 213). Тогда

$$AB + AN > BN = BM + MN \quad \text{и} \quad MN + NC > MC.$$

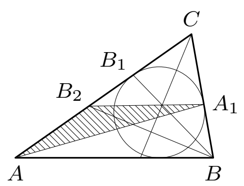


Рис. 212

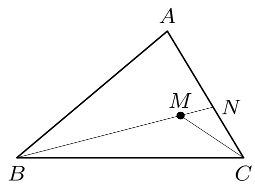


Рис. 213

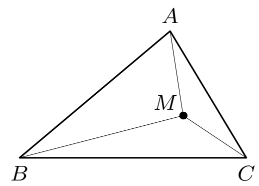


Рис. 214

Сложив почленно эти неравенства, получим

$$AB + AN + NC + MN > MN + BM + MC,$$

или

$$AB + AC + MN > BM + MC + MN.$$

Отсюда следует, что $AB + AC > BM + MC$.

1.390. Из предыдущей задачи следует, что для точки M, лежащей внутри треугольника ABC (рис. 214), верны неравенства

$$MB + MC < AB + AC,$$
$$MB + MA < AC + BC,$$
$$MA + MC < AB + BC.$$

Сложив их почленно, получим

$$2(MA + MB + MC) < 2(AB + BC + AC).$$

Отсюда следует, что указанная сумма расстояний меньше периметра треугольника. Применяя неравенство треугольника к треугольникам AMC, BMC и AMB, получим

$$AM + MC > AC, \quad BM + MC > BC \quad \text{и} \quad AM + MB > AB,$$

откуда

$$AM + BM + CM > \frac{1}{2}(AB + AC + BC).$$

1.391. Пусть в треугольнике ABC угол BAC равен 75°, а высота BN вдвое меньше стороны AC (рис. 215). Докажем, что $BC = AC$. Предположим, что $BC < AC$. Тогда

$$\angle ABC > 75^\circ, \quad \angle ACB < 30^\circ, \quad BN < \frac{1}{2}BC < \frac{1}{2}AC,$$

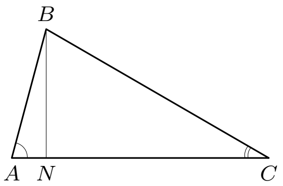


Рис. 215

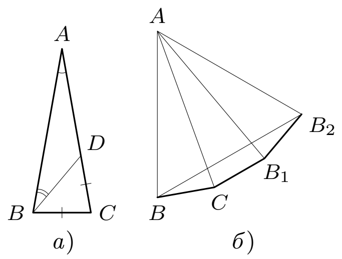


Рис. 216

что противоречит условию. Аналогично докажем, что BC не может быть больше AC.

1.392. На боковой стороне AC данного равнобедренного треугольника ABC отложим отрезок CD, равный основанию BC (рис. 216, *а*). Тогда $\angle ABD = 80° - 50° = 30°$, значит, в треугольнике ABD угол ABD больше угла BAD, поэтому $AD > BD > BC$ (в равнобедренном треугольнике BDC основание BD лежит против большего угла C). Следовательно,

$$AC = AD + CD > BC + CD = 2BC.$$

Пусть точка B_1 симметрична точке B относительно прямой AC, а точка B_2 симметрична C относительно AB_1 (рис. 216, *б*). Тогда $\angle BAB_2 = 3\angle BAC = 60°$ и $AB_2 = AB$, поэтому треугольник BAB_2 равносторонний. Следовательно,

$$AB = BB_2 < BC + CB_1 + B_1B_2 = 3BC.$$

1.393. 4 или 5. ▮ У квадрата и правильного пятиугольника все диагонали равны. Докажем, что других выпуклых многоугольников со всеми равными диагоналями не существует.

Предположим, что все диагонали выпуклого многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ равны и $n \geqslant 6$ (рис. 217). Рассмотрим выпуклый четырехугольник $A_1A_2A_4A_5$. Сумма длин его диагоналей A_1A_4 и A_2A_5 больше суммы противоположных сторон A_2A_4 и A_1A_5, что невозможно, так как по предположению эти суммы равны.

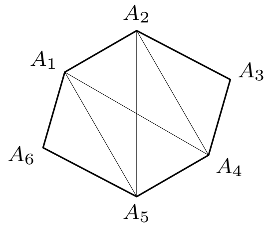


Рис. 217

1.394. Допустим, что в городе P приземлятся, например, 6 самолетов, вылетевших из городов A_1, A_2, $\ldots$, A_6, и точки A_1, A_2, $\ldots$, A_6 — последовательные вершины шестиугольника (рис. 218). Так как расстояние между городами A_1 и A_2 должно быть больше, чем расстояние от каждого из них до города P, то $\angle A_1PA_2 > 60^\circ$ (см. задачу **1.143**). Аналогично, углы A_2PA_3, A_3PA_4, A_4PA_5, A_5PA_6, A_6PA_1 больше 60°. Но тогда полный угол при точке P будет превосходить 360°, что невозможно.

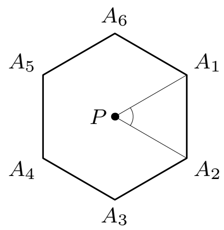


Рис. 218

8 класс

§ 2.1

2.1. 3, 9, 3, 9.

2.2. 65°, 115°, 65°, 115°.

2.3. *Указание.* Противолежащие стороны AN и MC четырехугольника $AMCN$ равны и параллельны.

2.4. $2a$.

2.5. a, $a+b$, a, $a+b$ или b, $a+b$, b, $a+b$.

2.6. 4, 30°, 120°.

2.8. 2, 4, 2, 4.

2.10$^{\mathbf{0}}$. *Указание.* Диагонали четырехугольника $ABDC$ пересекаются в точке M и делятся ею пополам.

2.13. Пусть AB и CD — различные диаметры окружности с центром O. Диагонали AB и CD четырехугольника $ADBC$ пересекаются в точке O, делятся ею пополам и равны между собой как диаметры одной окружности. Следовательно, $ADBC$ — прямоугольник.

2.14. В точке пересечения диагоналей.

2.15. В точке пересечения диагоналей.

2.16. *Указание.* Проведите два диаметра под заданным углом друг к другу.

2.17. 4.

2.18. 4, 8, 4, 8. *Указание.* Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

2.19. 20°, 80°, 80°.

2.20. *Указание.* Стороны четырехугольника O_1AO_2B равны как радиусы окружностей. Диагонали четырехугольника $AMBN$ взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам.

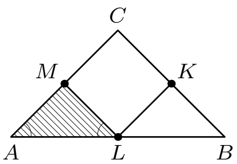


Рис. 219

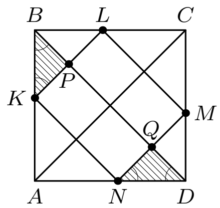


Рис. 220

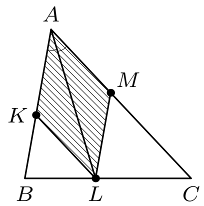


Рис. 221

2.21. *Указание.* Биссектрисы соседних углов параллелограмма взаимно перпендикулярны.

2.22. $\frac{a}{2}$. *Указание.* Пусть вершина L квадрата $CKLM$ (рис. 219) лежит на гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC, а вершины K и M соответственно на катетах BC и AC. Тогда $AM = ML = MC$.

2.23. $\frac{a}{3}$. *Указание.* Пусть вершины L и M квадрата $KLMN$ лежат на гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC, а вершины K и N соответственно на катетах BC и AC. Тогда $BL = KL = ML$ и $AM = MN = ML$.

2.24. 12. *Указание.* Пусть вершины K, L, M и N прямоугольника $KLMN$ (рис. 220) расположены соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$, $KN \parallel BD$ и $KL \parallel AC$, а отрезки KL и MN пересекают диагональ BD квадрата соответственно в точках P и Q. Тогда $KP = BP$, $NQ = DQ$, $KN = PQ$.

2.25. *Указание.* Пусть $ABCD$ — искомый параллелограмм, AB, AD и AC — данные стороны и диагональ. Тогда треугольник ABC можно построить по трем сторонам.

2.26. *Указание.* Пусть вершина L ромба $AKLM$ (рис. 221) лежит на стороне BC треугольника ABC, а вершины K и L — на сторонах AB и AC. Тогда AL — биссектриса треугольника ABC.

2.27. *Указание.* Пусть окружность с центром O касается всех сторон ромба $ABCD$ (рис. 222). Если M — точка касания со стороной AB, то $OM \perp AB$, поэтому

$$\angle MOB = 90^\circ - \angle ABO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC.$$

2.28. Прямоугольные треугольники ABM и CBN (рис. 223)

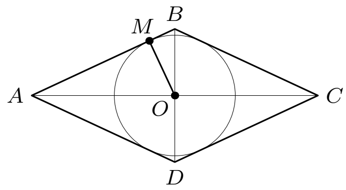


Рис. 222

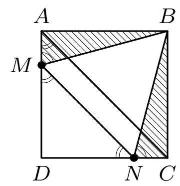


Рис. 223

равны по катету и гипотенузе, поэтому $\angle AMB = \angle CNB$. Значит,

$$\angle DMN = 180^\circ - \angle AMB - \angle BMN =$$
$$= 180^\circ - \angle CNB - \angle BNM = \angle DNM = 45^\circ = \angle DAC.$$

Следовательно, $MN \parallel AC$.

2.29. Пусть M и N — середины противоположных сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно (рис. 224), O — точка пересечения отрезков MN и AC. Треугольники MOC и NOA равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Поэтому $AO = OC$. Следовательно, O — центр параллелограмма $ABCD$.

2.30. Пусть $ABCDEF$ — выпуклый шестиугольник, в котором $AB = DE$ и $AB \parallel DE$, $BC = EF$ и $BC \parallel EF$, $CD = AF$ и $CD \parallel AF$ (рис. 225). Противолежащие стороны AB и DE четырехугольника $ABDE$ равны и параллельны, поэтому $ABDE$ — параллелограмм. Его диагональ AD проходит через середину O диагонали BE. Аналогично докажем, что диагональ FC параллелограмма $ACDF$ также проходит через точку O.

2.31. Пусть O — точка пересечения отрезков AC и NL (рис. 226). Из равенства треугольников NOC и LOA (по

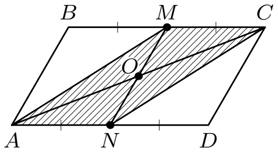


Рис. 224

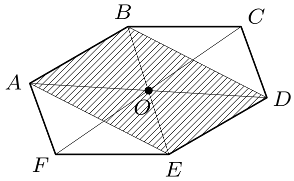


Рис. 225

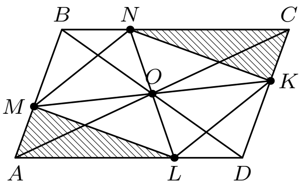


Рис. 226

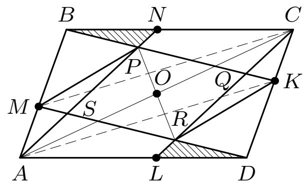


Рис. 227

стороне и двум прилежащим к ней углам) следует, что $AO = OC$ и $NO = OL$, т. е. диагональ NL четырехугольника $KLMN$ проходит через центр O параллелограмма $ABCD$ и делится точкой O пополам. Аналогично докажем, что вторая диагональ MK этого четырехугольника проходит через точку O и также делится ею пополам. Таким образом, диагонали четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке O и делятся ею пополам. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм и его центр совпадает с центром O параллелограмма $ABCD$.

2.32. *Указание.* Пусть O — центр параллелограмма $ABCD$ (рис. 226). Докажите, что O — середина отрезков MK и NL.

2.33. Из равенства треугольников ABN и CDL (по двум сторонам и углу между ними) следует, что $\angle ANB = \angle CLD = \angle BCL$, поэтому $AN \parallel CL$. Аналогично, $BK \parallel DM$. Значит, при пересечении прямых AN, BK, CL и DM получится параллелограмм. Пусть P, Q, R, S — его вершины (рис. 227). Из равенства треугольников BPN и DRL (по стороне и двум прилежащим к ней углам) следует, что $BP = DR$, поэтому $PK = MR$. Значит, четырехугольник $MPKR$ — параллелограмм. Его диагональ PR проходит через середину диагонали MK. В то же время, середина MK совпадает с серединой AC, так как MK и AC — диагонали параллелограмма $AMCK$. Следовательно, PR проходит через середину AC, т. е. через центр параллелограмма $ABCD$. Аналогично для QS.

2.34. *Указание.* Высоты треугольника ADC пересекаются в одной точке.

2.35. Пусть M — точка внутри угла ABC (рис. 228). На продолжении отрезка BM за точку M отложим отрезок MN,

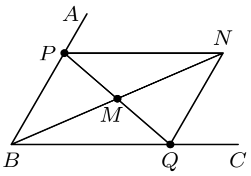


Рис. 228

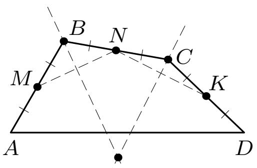


Рис. 229

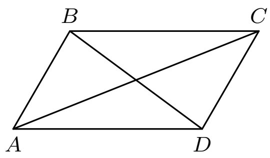


Рис. 230

равный BM. Через точку N проведем прямые, параллельные сторонам угла ABC. Если P и Q — точки пересечения этих прямых с лучами BA и BC соответственно, то $BPNQ$ — параллелограмм, а M — его центр. Следовательно, диагональ PQ делится точкой M пополам.

2.36. *Указание.* Пусть M, N и K — середины равных сторон AB, BC и CD четырехугольника $ABCD$ соответственно (рис. 229). Тогда точка B лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MN, а точка C — на серединном перпендикуляре к отрезку NK. Точка N лежит внутри угла, образованного этими перпендикулярами, и является серединой отрезка BC с концами на сторонах угла. Далее см. предыдущую задачу.

2.37. Пусть в параллелограмме $ABCD$ угол ABC больше угла BAD (рис. 230). Рассмотрим треугольники ABC и ABD. Поскольку AB — их общая сторона, $BC = AD$, а $\angle ABC > \angle BAD$, то $AC > BD$.

2.38. 1. *Указание.* Опустите перпендикуляр из вершины тупого угла ромба на одну из противолежащих сторон.

2.39. *Указание.* Постройте прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна данной стороне ромба, а высота, проведенная из вершины угла, — радиусу данной окружности.

2.40. 2. **2.41.** 9. **2.42.** 15. **2.43.** 60°, 120°, 60°, 120°.

2.44. *Указание.* Пусть точки A и B лежат на противоположных сторонах квадрата с центром O. Тогда точка, симметричная точке A относительно центра O, также лежит на стороне квадрата.

2.45. *Указание.* Стороны полученного четырехугольника отсекают от квадрата четыре равных прямоугольных треугольника.

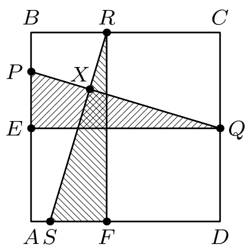


Рис. 231

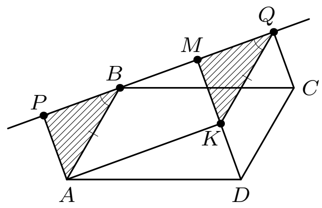


Рис. 232

2.46. *Указание.* Стороны полученного четырехугольника отсекают от квадрата четыре равных прямоугольных треугольника.

2.47. Через точку X, расположенную внутри квадрата $ABCD$, проведем две взаимно перпендикулярные прямые. Пусть первая прямая пересекает стороны AB и CD в точках P и Q, а вторая — стороны BC и AD в точках R и S (рис. 231). Докажем, что $PQ = RS$.

Пусть E — проекция точки Q на AB, а F — проекция точки R на AD. Прямоугольные треугольники PEQ и SFR равны по катету и острому углу. Поэтому $PQ = RS$.

2.48. $a + b$. ▌ Пусть P, M и Q — проекции точек A, D и C на указанную прямую соответственно (рис. 232). Если прямая, проходящая через точку Q параллельно CD, пересекает отрезок DM в точке K, то $CDKQ$ — параллелограмм. Поэтому $KQ = CD = AB$ и $KQ \parallel CD \parallel AB$. Значит, $ABQK$ — также параллелограмм. Прямоугольные треугольники APB и KMQ равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $MK = AP = a$. Следовательно, $DM = MK + DK = AP + CQ = a + b$.

2.49. а) $|a-b|$. ▌ Пусть биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$, в котором $AB = a$, $BC = b$, $b > a$ (рис. 233), пересекает биссектрисы углов B и D соответственно в точках K и L, а сторону BC — в точке P; биссектриса угла C пересекает биссектрисы углов D и B соответственно в точках M и N, а сторону AD в точке Q. Четырехугольник $KLMN$ — прямоугольник, так как биссектрисы углов, прилежащих к стороне параллелограмма, взаимно перпендикулярны. Треугольник ABP равнобедренный, так как $\angle BAP = \angle PAD = \angle BPA$,

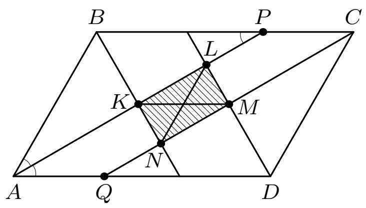


Рис. 233

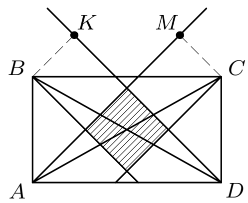


Рис. 234

поэтому его биссектриса BK является медианой. Значит, K — середина AP. Аналогично докажем, что треугольник CQD также равнобедренный и M — середина CQ. Тогда $PC = AQ = b - a$, а четырехугольник $APCQ$ — параллелограмм ($PC = AQ$ и $PC \parallel AQ$). Значит, четырехугольник $PKMC$ — также параллелограмм ($PK \parallel CM$, $PK = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}CQ = CM$). Следовательно, $LN = KM = PC = b - a$.

б) $a + b$.

2.50. Поскольку биссектрисы соседних углов параллелограмма пересекаются под прямым углом, то в пересечении образуется прямоугольник. Опустим из вершин B и C прямоугольника $ABCD$ перпендикуляры BK и CM на биссектрисы углов D и A соответственно (рис. 234). Из равенства прямоугольных треугольников AMC и DKB (по гипотенузе и острому углу) следует, что $MC = KB$. Длины этих отрезков — это расстояния между биссектрисами противоположных углов данного прямоугольника, т. е. длины сторон прямоугольника, образованного пересечениями биссектрис. Следовательно, стороны полученного прямоугольника равны между собой, т. е. это квадрат.

2.51. $a+b+c$. ▮ Пусть точка M расположена на стороне BC треугольника ABC (рис. 235), а точки K и N — на сторонах AB и AC соответственно, причем $MK \parallel AC$ и $MN \parallel AB$; $KP = a$, $NQ = b$ и AR — высоты треугольников BKM, MNC и ABC. Через точку N проведем прямую, параллельную BC. Предположим, что эта прямая пересекает сторону AB в точке F, расположенной между A и K. Четырехугольник $AKMN$ — параллелограмм, поэтому $AN = KM$. Высота AD треугольника ANF равна высоте KP равного ему треугольника KMB,

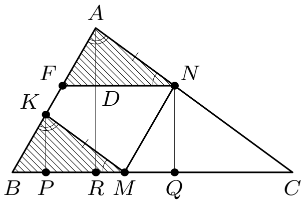


Рис. 235

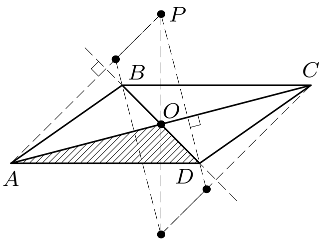


Рис. 236

следовательно, $AR = AD + DR = KP + NQ = a + b$. Если точка M лежит внутри треугольника ABC на расстоянии, равном c, от прямой BC, то искомая высота равна сумме трех данных высот.

2.52. *Указание.* Через данную на основании точку проведите прямую, параллельную боковой стороне треугольника. Высоты полученного равнобедренного треугольника, проведенные к его боковым сторонам, равны между собой.

2.53. *Указание.* Пусть прямая, проходящая через вершину A параллелограмма $ABCD$ с центром O (рис. 236) перпендикулярно диагонали BD, пересекает прямую, проходящую через вершину D перпендикулярно диагонали AC, в точке P. Тогда P — точка пересечения высот треугольника AOD. Следовательно, третья высота этого треугольника лежит на прямой PO.

2.54$^{\mathbf{0}}$. *Указание.* Высоты BN, CM и AQ треугольника ABC пересекаются в одной точке.

2.55. *Указание.* Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

2.56. Пусть равные окружности с центрами O_1, O_2 пересекаются в точках M и A, равные окружности с центрами O_2 и O_3 пересекаются в точках M и B, окружности с центрами O_1 и O_3 — в точках M и C (рис. 237). Четырехугольники O_1MO_3C и O_2MO_3B — ромбы, поэтому $O_1C = O_2B$ и $O_1C \parallel O_2B$. Значит, O_1O_2BC — параллелограмм. Следовательно, $O_1O_2 = BC$. Аналогично, $O_1O_3 = AB$ и $O_2O_3 = AC$, поэтому треугольники $O_1O_2O_3$ и BCA равны по трем сторонам.

2.57. Поскольку $BD = CD$, $BM = CN$ и $\angle MBD = \angle NCD = 60^\circ$ (рис. 238), треугольники MBD и NCD

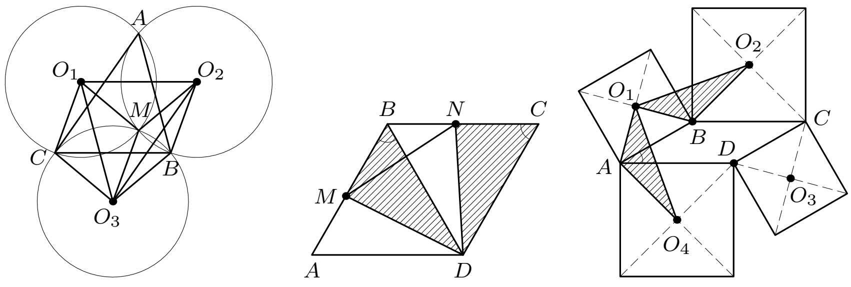


Рис. 237 Рис. 238 Рис. 239

равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $DM = DN$ и $\angle MDN = \angle BDN + \angle BDM = \angle BDN + \angle CDN = \angle BDC = 60^\circ$. Следовательно, треугольник DMN равносторонний.

2.58. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры квадратов, построенных соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ (рис. 239). Обозначим $\angle BAD = \alpha$. Рассмотрим случай, когда $\alpha < 90^\circ$. Поскольку $O_1A = O_1B$, $AO_4 = BO_2$ и $\angle O_1AO_4 = 45^\circ + \alpha + 45^\circ = 90^\circ + \alpha = \angle O_1BO_2$, то треугольники O_1AO_4 и O_1BO_2 равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $O_1O_4 = O_1O_2$. Кроме того,

$$\angle O_2O_1O_4 = \angle O_2O_1B + \angle BO_1O_4 = \angle AO_1O_4 + \angle BO_1O_4 = 90^\circ.$$

Остальное аналогично.

2.59. Соединим вершину B с серединой K стороны AD (рис. 240). Поскольку $BM = DK$ и $BM \parallel DK$, четырехугольник $BMDK$ — параллелограмм, поэтому $BK \parallel DM$ и $\angle BPM = \angle KBN$. В то же время, углы KBN и MAN симметричны относительно серединного перпендикуляра к стороне CD, следовательно, они равны.

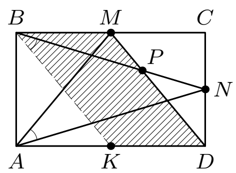


Рис. 240

2.60. Пусть N — середина стороны BC, K — точка пересечения BC и PM (рис. 241). Обозначим $\angle APM = \alpha$. Тогда PN — медиана прямоугольного треугольника BPC, проведенная к гипотенузе BC, поэтому $PN = BN = AB = MN$, а так как $MN \parallel BP$, то $\angle MPN = \angle PMN = \angle BPK = \alpha$, $\angle PBK = \angle BPN = 2\alpha$.

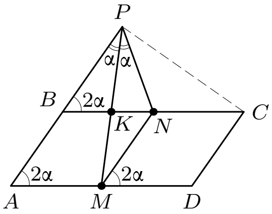


Рис. 241

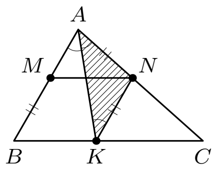


Рис. 242

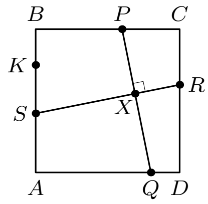


Рис. 243

Следовательно,

$$\angle DMP = \angle CKP = \angle PBK + \angle BPK = 2\alpha + \alpha = 3\alpha = 3\angle APM.$$

2.61. Предположим, что нужные точки M и N построены (рис. 242). Через точку N проведем прямую, параллельную стороне AB, до пересечения со стороной BC в точке K. Тогда $NK = MB = AN$. Поэтому треугольник ANK равнобедренный, $\angle BAK = \angle AKN = \angle KAC$. Следовательно, AK — биссектриса угла A треугольника ABC.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Проведем биссектрису AK треугольника ABC. Через точку K проведем прямую, параллельную AB. Точка ее пересечения со стороной AC есть искомая точка N. Через точку N проведем прямую, параллельную BC. Точка пересечения этой прямой со стороной AB есть искомая точка M.

2.62. *Указание.* Если через точку, лежащую внутри квадрата, провести две перпендикулярные прямые, каждая из которых пересекает противоположные стороны квадрата, то отрезки этих прямых, заключенные внутри квадрата, равны между собой (рис. 243).

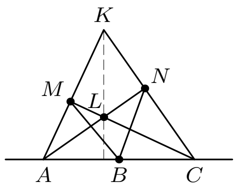


Рис. 244

2.63. Отметим на данной прямой точки A, B и C такие, что $AB = BC = 1$ см (рис. 244). Построим точки M и N по одну сторону от прямой так, что $MB = NB = 1$ см. Тогда $\angle AMC = \angle ANC = 90°$. Пусть AM и CN пересекаются в точке K, а AN и CM — в точке L. Тогда KL перпендикулярно AC, так как AN и CM — высоты треугольника AKC.

§ 2.2

2.65. 12. **2.66.** $a + b$.

2.67. *Указание.* Через каждую из данных точек проведите прямую, параллельную прямой, проходящей через две другие точки.

2.68⁰. *Указание.* Проведите диагонали данного четырехугольника.

2.69. 18. **2.70.** 16. **2.71.** 3, 5, 3, 5, 90°, 90°, 90°, 90°.

2.72. *Первый способ.* Пусть M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, а точки K и N — середины катетов AC и BC соответственно (рис. 245). Тогда MK и MN — средние линии треугольника ABC, $MK \parallel BC$, $MN \parallel AC$, а так как $AC \perp BC$, то $MK \perp AC$ и $MN \perp BC$. Следовательно, четырехугольник $CNMK$ — прямоугольник, поэтому его диагонали KN и CM равны между собой.

Второй способ. Медиана CM прямоугольного треугольника ABC, проведенная из вершины прямого угла C, равна половине гипотенузы AB, а отрезок KN, соединяющий середины катетов AC и BC, — средняя линия треугольника ABC. Следовательно, $CM = \frac{1}{2}AB = KN$.

2.73. 6. **2.74.** 10. **2.75.** 4. **2.76.** $\frac{a}{2}$. **2.77.** $2a$.

2.78. 3. *Указание.* Соедините середины AB и AC.

2.79. Нет. ▌ Предположим, что прямая, проходящая через середины P и Q отрезков AC и BC, касается окружности в точке M (рис. 246). Тогда $PQ = PM + QM = AP + BQ = CP + CQ$, что невозможно, так как $CP + CQ > PQ$.

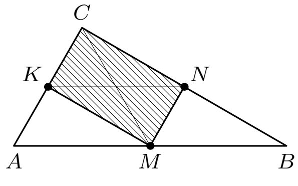


Рис. 245

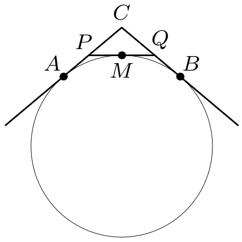


Рис. 246

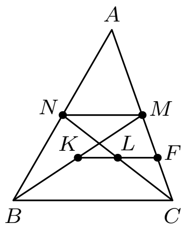


Рис. 247

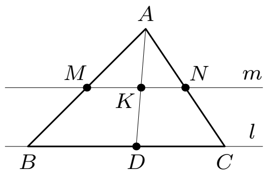


Рис. 248

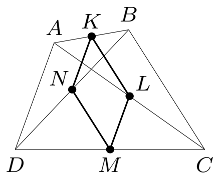


Рис. 249

2.80. $\frac{a}{4}$. ▮ Пусть K и L — середины медиан BM и CN треугольника ABC со стороной BC, равной a (рис. 247). Если F — середина MC, то FL — средняя линия треугольника MCN, а FK — средняя линия треугольника BMC, поэтому $FL \parallel MN \parallel BC \parallel FK$. Значит, точки K, L и F лежат на одной прямой. Следовательно,

$$KL = KF - FL = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a.$$

2.81. Прямая, параллельная данной. ▮ Пусть l — данная прямая, A — данная точка, не лежащая на этой прямой, B — некоторая точка прямой l, M — середина отрезка AB (рис. 248). Проведем через точку M прямую m, параллельную l. Если C — произвольная точка прямой l, а N — середина AC, то прямая m проходит через точку N, так как $MN \parallel l$ по теореме о средней линии треугольника, а через точку M проходит только одна прямая, параллельная l. Пусть теперь K — произвольная точка прямой m, отличная от M. Если прямая AK пересекает прямую l в точке D, то K — середина AD. Действительно, если это не так, то, соединив середину K_1 отрезка AD с точкой M, получим среднюю линию MK_1 треугольника ABD. Тогда $MK_1 \parallel l$. Значит, точка K_1 совпадает с точкой K.

2.82. Пусть K и M — середины сторон соответственно AB и CD четырехугольника $ABCD$, а N и L — середины его диагоналей соответственно BD и AC (рис. 249). Тогда KN — средняя линия треугольника ABD, а ML — средняя линия треугольника ADC, поэтому $KN \parallel AD \parallel ML$ и $KN = \frac{1}{2}AD = ML$. Следовательно, $KLMN$ — параллелограмм.

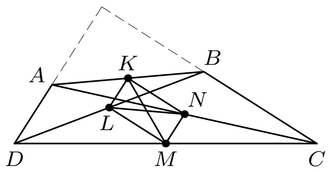


Рис. 250

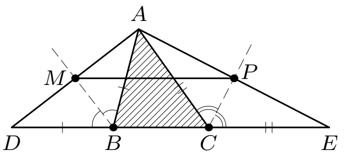


Рис. 251

2.83. *Указание.* Параллелограмм с равными диагоналями — прямоугольник.

2.84. *Указание.* Параллелограмм с перпендикулярными диагоналями — ромб.

2.85. 1. ▮ Пусть K и M — середины сторон соответственно AB и CD четырехугольника $ABCD$ (рис. 250), а N и L — середины его диагоналей соответственно AC и BD. Тогда $KLMN$ — параллелограмм, а так как $KN \parallel BC$, $KL \parallel AD$ и $BC \perp AD$, — это прямоугольник. Следовательно, $NL = KM = 1$.

2.86. 90°.

2.87. 5. *Указание.* Пусть продолжения отрезков AM и AP пересекают прямую BC в точках D и E (рис. 251). Тогда треугольники ABD и ACE равнобедренные, а MP — средняя линия треугольника ADE.

2.88. $1 : 3$, считая от вершины C. ▮ Пусть M — середина гипотенузы AB, N — середина катета BC, K — точка касания данной окружности с прямой AC, P — середина средней линии MN треугольника ABC (рис. 252). Перпендикуляр к AC, проведенный через точку K, проходит через центр окружности и делит пополам перпендикулярную ему хорду MN, т. е. проходит также через точку P. Тогда $CK = NP = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{4}AC$. Следовательно, $CK : AK = 1 : 3$.

2.89. *Указание.* Пусть BM и CN — равные медианы треугольника ABC, O — точка их пересечения. Тогда треугольники BON и COM равны по двум сторонам и углу между ними.

2.90. Пусть M и N — соответственно середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$ (рис. 253), O — точка пересечения диагоналей AC и BD, K — точка пересечения AC и MN. Поскольку MN — средняя линия треугольника CBD,

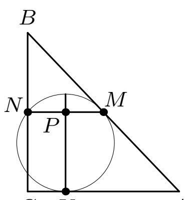


Рис. 252

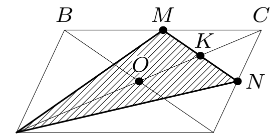


Рис. 253

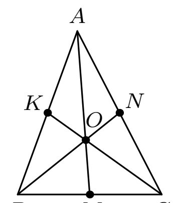


Рис. 254

K — середина OC. Поэтому $OK = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}AO$. Значит, O — точка пересечения медиан треугольника AMN. Теперь построение очевидно.

2.91. Пусть O — точка пересечения медиан AM, BN и CK треугольника ABC (рис. 254). Поскольку

$$OA + OB > AB, \quad OA + OC > AC \quad \text{и} \quad OB + OC > BC,$$

то, сложив почленно эти три неравенства, получим, что

$$2(OA + OB + OC) > AB + BC + AC,$$

или

$$2\Big(\frac{2}{3}AM + \frac{2}{3}BN + \frac{2}{3}CK\Big) > AB + BC + AC.$$

Отсюда следует, что

$$AM + BN + CK > \frac{3}{4}(AB + BC + AC).$$

Поскольку медиана треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она расположена (см. задачу $\mathbf{1.364^0}$), то

$$AM < \frac{1}{2}(AB + BC),\ BN < \frac{1}{2}(AB + BC) \text{ и } CK < \frac{1}{2}(AC + BC).$$

Сложив почленно эти три неравенства, получим

$$AM + BN + CK < AB + BC + AC.$$

2.92. *Указание.* Медианы треугольника BCD пересекаются в одной точке.

2.93. Пусть P и Q — точки пересечения диагонали BD с отрезками AM и AN соответственно, O — точка пересечения

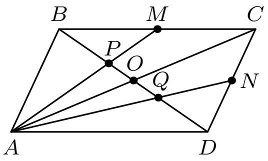


Рис. 255

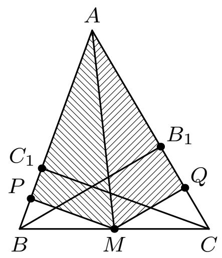


Рис. 256

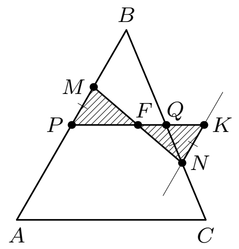


Рис. 257

диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 255). Тогда P и Q — точки пересечения медиан треугольников ABC и ADC, поэтому

$$BP = \frac{2}{3}BO = \frac{1}{3}BD, \quad DQ = \frac{2}{3}DO = \frac{1}{3}BD \quad \text{и} \quad PQ = \frac{1}{3}BD.$$

2.94. 32.

2.95. Пусть $BB_1 = h_1$ и $CC_1 = h_2$ — высоты треугольника ABC, $AM = m$ — медиана (рис. 256). Предположим, что треугольник ABC построен. Опустим перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и AC. Тогда MP и MQ — средние линии треугольников BC_1C и BB_1C. Поэтому

$$MP = \frac{1}{2}CC_1 = \frac{1}{2}h_2 \quad \text{и} \quad MQ = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2}h_1.$$

Отсюда вытекает следующий способ построения. Построим прямоугольные треугольники APM и AQM (по катету и гипотенузе m). Через точку M проведем прямую, отрезок которой, заключенный внутри угла PAQ, делился бы точкой M пополам (см. задачу **2.35**).

2.96. Пусть P и Q — середины сторон AB и BC (рис. 257). Предположим, что $BM < BP$. Тогда $PM = BP - BM = CQ - CN = QN$. Через точку N проведем прямую, параллельную AB. Пусть K — точка пересечения этой прямой с прямой PQ, а F — точка пересечения прямых PQ и MN. Тогда $KN = QN = PM$. Значит, треугольники FKN и FPM равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, $NF = MF$, т. е. середина F отрезка MN принадлежит средней линии PQ треугольника ABC.

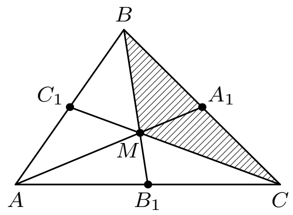


Рис. 258

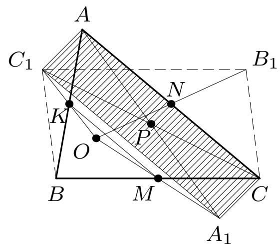


Рис. 259

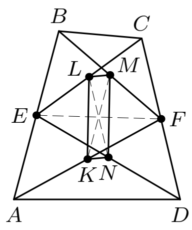


Рис. 260

2.97. *Указание.* Медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

2.98. *Указание.* Медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

2.99. Предположим, что задача решена. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы построенного треугольника, M — точка их пересечения (рис. 258). Рассмотрим треугольник CMB. Его можно построить по двум сторонам ($CM = \frac{2}{3}CC_1$, $BM = \frac{2}{3}BB_1$) и медиане, проведенной к третьей ($MA_1 = \frac{1}{3}AA_1$). См. задачу $\mathbf{1.81^0}$.

2.101. *Указание.* Пусть M и K — середины BC и AB (рис. 259). Тогда MK — средняя линия треугольников OA_1C_1 и ABC.

2.102. Пусть M, N и K — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC (рис. 259). Тогда MK — средняя линия треугольников ABC и OA_1C_1. Следовательно, $A_1C_1 = 2MK = AC$ и $A_1C_1 \parallel MK \parallel AC$ и четырехугольник AC_1A_1C — параллелограмм. Поэтому его диагонали AA_1 и CC_1 делятся точкой P их пересечения пополам. Аналогично докажем, что диагональ BB_1 параллелограмма CB_1C_1B проходит через середину P его второй диагонали CC_1. Следовательно, отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через точку P.

2.103. Пусть K, L, M и N — середины отрезков AF, CE, BF и DE соответственно (рис. 260). Докажем, что диагонали KM и LN четырехугольника $KLMN$ делятся точкой пересечения пополам. Для этого проведем медиану EF треугольника AFB. Средняя линия KM проходит через середину P медианы EF и

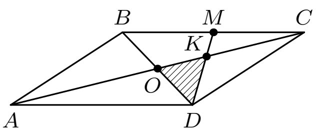


Рис. 261

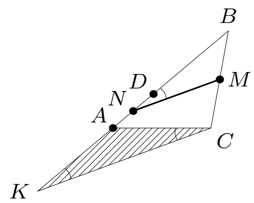


Рис. 262

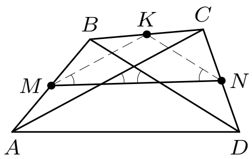


Рис. 263

делится точкой P пополам (см. пример 1 из §2.2, с. 64). Аналогично докажем, что вторая диагональ LN также проходит через точку P и делится ею пополам. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм.

2.104. 6. *Указание.* Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма, M — середина BC, K — точка пересечения отрезков DM и OC. Тогда треугольник ODK — равносторонний (рис. 261).

2.105. $20°$. *Указание.* Через точку C проведите прямую, параллельную MN, до пересечения с прямой AB в точке K (рис. 262). Треугольник ACK — равнобедренный.

2.106. Пусть M, N и K — середины сторон AB, CD и BC четырехугольника $ABCD$ (рис. 263), причем прямая MN образует равные углы с диагоналями. Поскольку MK и KN — средние линии треугольников ABC и BCD, то $\angle KMN = \angle KNM$. Поэтому треугольник MKN — равнобедренный, $KM = KN$. Следовательно, $AC = BD$.

2.107. $\frac{a}{2}$. ▮ Проведем диаметр DD_1 (рис. 264). Тогда $\angle DBD_1 = 90°$, поэтому $BD_1 \parallel AC$, значит, $CD_1 = AB$. Перпендикуляр, опущенный из центра O на хорду CD_1, проходит через середину M этой хорды, поэтому OM — средняя линия треугольника DD_1C, $OM = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}$. Поскольку равные хорды равноудалены от центра окружности, расстояние от центра окружности до хорды AB также равно $\frac{a}{2}$.

2.108⁰. *Указание.* Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 265); O — центр его описанной окружности; M, N, K, L — середины отрезков AH, BH, AC и BC соответственно. Докажите равенство треугольников MNH и LKO.

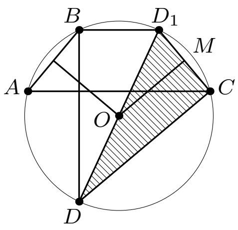


Рис. 264

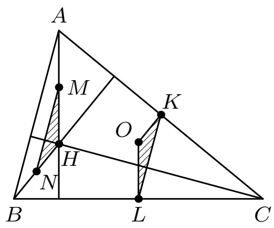


Рис. 265

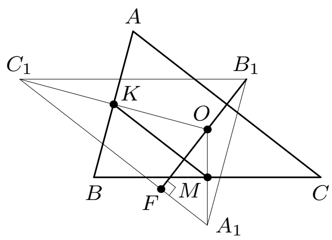


Рис. 266

2.109. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, M и L — середины отрезков AH и BC соответственно (рис. 265). Поскольку $OL = AM$ (см. задачу **2.108$^{\mathbf{0}}$**) и $OL \parallel AM$, то четырехугольник $AMLO$ — параллелограмм. Значит, $ML = OA$. Осталось заметить, что OA — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

2.110. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки, симметричные центру O окружности, описанной около треугольника ABC, относительно сторон BC, CA и AB соответственно (рис. 266). Предположим, что нужный треугольник ABC построен. Пусть M, N и K — середины его сторон BC, CA и AB соответственно. Тогда MK — средняя линия треугольников ABC и A_1OC_1. Поэтому $MK \parallel AC$, $MK \parallel A_1C_1$, а так как B_1O — серединный перпендикуляр к отрезку AC, то $B_1O \perp A_1C_1$, т. е. высота B_1F треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через точку O. Аналогично для остальных высот треугольника $A_1B_1C_1$. Следовательно, O — точка пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$. Отсюда вытекает следующий способ построения. Строим точку O пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$. Серединные перпендикуляры к отрезкам OA_1, OB_1 и OC_1 содержат стороны искомого треугольника ABC.

2.111. Предположим, что задача решена. Пусть M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 — середины последовательных сторон A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_1A_5 искомого пятиугольника (рис. 267). Если K — середина диагонали A_3A_5, то четырехугольник $M_1M_2KM_5$ — параллелограмм. Построение: находим точку K; строим треугольник $A_3A_4A_5$ по серединам его сторон — M_3, M_4 и K;

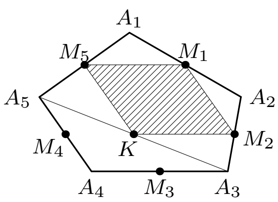


Рис. 267

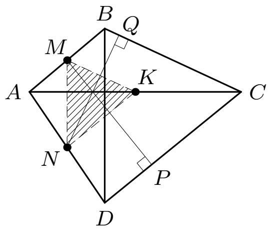


Рис. 268

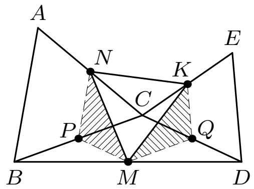


Рис. 269

построенный треугольник достраиваем до искомого пятиугольника.

2.112. Пусть M, N и K — середины отрезков AB, AD и AC соответственно, а P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точек M и N соответственно на стороны CD и BC четырехугольника $ABCD$ (рис. 268). По теореме о средней линии треугольника $MN \parallel BD$, $MK \parallel BC$ и $NK \parallel CD$. Поэтому высоты треугольника MNK лежат на прямых AC, NQ и MP. Следовательно, эти прямые пересекаются в одной точке.

2.113. Пусть P и Q — середины отрезков BC и DC соответственно (рис. 269). Докажем, что треугольники MPN и KQM равны. В самом деле,

$$PN = PC = MQ, \qquad PM = CQ = QK,$$

$$\angle MPN = \angle MPC + \angle CPN = \angle MQC + 60^\circ = \\ = \angle MQC + \angle CQK = \angle KQM.$$

Следовательно, $MN = MK$. Осталось доказать, что $\angle NMK = 60^\circ$. Пусть $\angle BCD = \alpha$. Тогда

$$\angle NMK = \angle PMQ - \angle PMN - \angle QMK = \alpha - \angle PMN - \angle PNM = \\ = \alpha - 180^\circ + \angle NPM = \alpha - 180^\circ + \angle NPC + \angle CPM = \\ = \alpha - 180^\circ + 60^\circ + (180^\circ - \alpha) = 60^\circ.$$

2.114. *Указание.* Пусть E и F — середины AP и BP соответственно. Докажите равенство треугольников KED и DFM.

§ 2.3

2.116. Верно.

2.117. $\frac{c}{2}$. *Указание.* Опустите перпендикуляр из вершины данного угла на большее основание.

2.118⁰. $\frac{1}{2}(a-b)$, $\frac{1}{2}(a+b)$. *Указание.* Опустите перпендикуляр из вершины B на AD.

2.119. 40°, 140°, 40°, 140°, 5, 5, 5, 5. *Указание.* Четырехугольник с вершинами в серединах сторон данной трапеции — ромб.

2.120. 5. *Указание.* Четырехугольник с вершинами в серединах сторон данной трапеции — прямоугольник.

2.121. 12 и 4. **2.122.** 5.

2.123. $2h$. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой о внешнем угле треугольника.

2.124. *Указание.* Через конец меньшего основания трапеции проведите прямую, параллельную боковой стороне.

2.125. 5. *Указание.* Опустите перпендикуляр из конца меньшего основания на большее и воспользуйтесь результатом задачи **2.118⁰**.

2.126. Боковую сторону CD. *Указание.* Пусть M — точка пересечения биссектрисы угла A с прямой BC. Тогда треугольник ABM равнобедренный.

2.127. $\frac{1}{2}(a+b)$. *Указание.* Примените теорему о средней линии трапеции.

2.128. *Указание.* Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны между собой.

2.129. *Указание.* Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла. Сумма углов при боковой стороне трапеции равна 180°.

2.130. 7, 10, 11.

2.131. Предположим, что трапеция $ABCD$ построена, AD и BC — основания и $AD > BC$ (рис. 270). Проведем через вершину C прямую, параллельную боковой стороне AB. Пусть K — точка пересечения этой прямой с основанием AD. Треугольник CKD можно построить по трем сторонам.

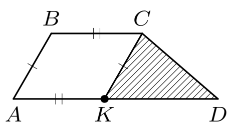


Рис. 270

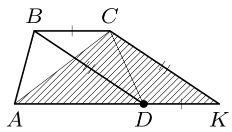


Рис. 271

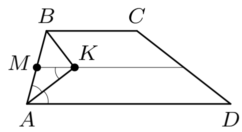


Рис. 272

2.132. Предположим, что трапеция $ABCD$ построена, AD и BC — основания, AC и BD — диагонали (рис. 271). Проведем через вершину C прямую, параллельную диагонали BD, и обозначим точку пересечения этой прямой с продолжением AD через K. Поскольку $DK = BC$, то треугольник AKC можно построить по трем сторонам.

2.133. 9. **2.134.** Нет.

2.135. Пусть AB — боковая сторона трапеции $ABCD$, K — точка пересечения биссектрис углов при вершинах A и B (рис. 272). Поскольку сумма углов трапеции при вершинах A и B равна 180°, биссектрисы этих углов взаимно перпендикулярны, т. е. $\angle AKB = 90°$. Медиана KM прямоугольного треугольника AKB, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы AB, поэтому треугольник AMK равнобедренный. Значит, $\angle AKM = \angle MAK = \angle DAK$. Следовательно, $MK \parallel AD$, а так как средняя линия трапеции также проходит через точку M и параллельна AD, то точка K принадлежит средней линии.

2.136. Пусть прямые BP и CQ пересекают прямую AD в точках M и N соответственно (рис. 273), K — точка на продолжении основания BC за точку B. Тогда $\angle AMB = \angle KBM = \angle ABM$, поэтому треугольник ABM — равнобедренный. Его биссектриса AP является медианой, значит, P — середина MB. Аналогично, Q — середина CN. Поскольку PQ — средняя линия трапеции $MBCN$, то

$$PQ = \frac{1}{2}(MN + BC) = \frac{1}{2}((AM + AD + DN) + BC) = \\ = \frac{1}{2}(AB + AD + DC + BC).$$

2.137. $\frac{1}{2}(b + d - a - c)$.

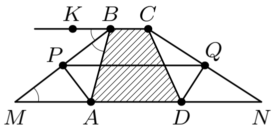


Рис. 273

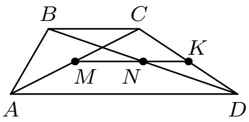


Рис. 274

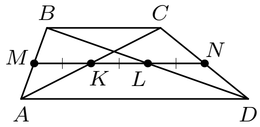


Рис. 275

2.138⁰. $\frac{1}{2}(a-b)$. ▮ Пусть M и N — середины диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ ($AD = a$, $BC = b$). Соединим точки M и N с серединой K стороны CD (рис. 274). Тогда MK и NK — средние линии треугольников ACD и BCD, поэтому $MK \parallel AD \parallel BC \parallel NK$. Значит, точки M, N и K лежат на одной прямой (параллельной основаниям трапеции). Следовательно, $MN = MK - KN = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(a-b)$.

2.139. Прямая, параллельная данным.

2.140. 3.

2.141. 1 : 2. ▮ Пусть $AD = a$, $BC = b$ — основания трапеции $ABCD$ ($a > b$), M и N — середины AB и CD соответственно, K и L — точки пересечения средней линии MN с диагоналями AC и BD соответственно (рис. 275). $MK = LN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}b$. По условию задачи $KL = MK = LN = \frac{1}{2}b$. Поэтому $MN = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{3}{2}b$. Из полученного уравнения находим, что $a = 2b$.

2.142. Пусть K — середина большего основания AD трапеции $ABCD$, в которой $AB = BC = \frac{1}{2}AD$ (рис. 276). Тогда $ABCK$ — ромб, поэтому $CK = AK = KD$. Следовательно, $AC \perp CD$.

2.143. 6. ▮ Пусть диагональ BD данной трапеции $ABCD$ образует с ее бóльшим основанием AD угол, равный 30° (рис. 277). Через вершину B проведем прямую, параллельную

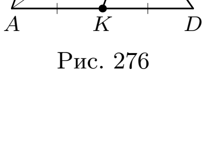


Рис. 276

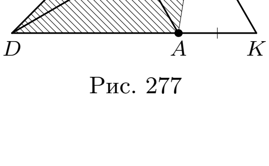


Рис. 277

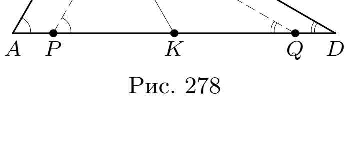


Рис. 278

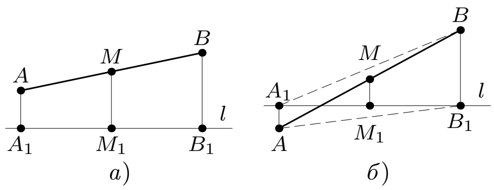


Рис. 279

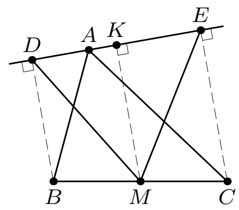


Рис. 280

второй диагонали AC ($AC = 6$), до пересечения с прямой AD в точке K. Тогда KBD — прямоугольный треугольник с катетом BK, лежащим против угла BDK, равного $30°$. Следовательно, $BC + AD = AK + AD = 2BK = 2AC = 12$, а средняя линия трапеции равна полусумме оснований, т. е. 6.

2.144. 8, 2, 3. ▌ Через середину M меньшего основания BC трапеции $ABCD$ проведем прямую, параллельную боковой стороне AB, до пересечения с основанием AD в точке P и прямую, параллельную боковой стороне CD, до пересечения с прямой AD в точке Q (рис. 278). Если K — середина AD, то $PK = AK - AP = AK - BM = DK - MC = DK - QD = KQ$, поэтому MK — медиана треугольника PMQ, а так как $\angle PMQ = 180° - 60° - 30° = 90°$, то $PK = KQ = MK = 3$. Значит, $AD - BC = PQ = 6$, а $AD + BC = 10$, откуда находим, что $AD = 8$ и $BC = 2$. Так как PM — катет прямоугольного треугольника PMQ, лежащий против угла в $30°$, то $AB = PM$ — меньшая боковая сторона трапеции $ABCD$ и $AB = PM = \frac{1}{2}PQ = 3$.

2.145⁰. Пусть данная прямая l не пересекает отрезок AB (рис. 279, a). Тогда отрезок MM_1 проходит через середину M боковой стороны трапеции AA_1B_1B и параллелен основаниям AA_1 и BB_1. Значит, MM_1 — средняя линия трапеции. Следовательно, M_1 — середина боковой стороны A_1B_1. Пусть прямая l пересекает отрезок AB (рис. 279, $б$). Тогда отрезок MM_1 проходит через середину M диагонали AB трапеции AA_1BB_1 и параллелен основаниям AA_1 и BB_1. Следовательно, M_1 — середина диагонали A_1B_1 (см. задачу **2.138⁰**). Случай, когда точка A или B лежит на прямой l, очевиден.

2.146. Пусть K — проекция середины M стороны BC на данную прямую (рис. 280). Тогда K — середина отрезка DE

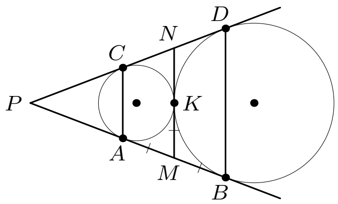


Рис. 281

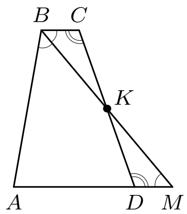


Рис. 282

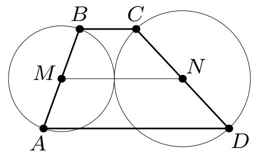


Рис. 283

(см. задачу **2.145⁰**). Значит, MK — медиана и высота треугольника DME. Поэтому треугольник DME — равнобедренный. Следовательно, $MD = ME$.

2.147. $\frac{1}{2}(a+b)$. ▮ Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке P (рис. 281). Углы при основаниях равнобедренных треугольников PAC и PBD равны, поэтому $AC \parallel BD$ и $ABDC$ — равнобокая трапеция. Поскольку $MA = MK = MB$, M — середина боковой стороны AB. Аналогично, N — середина боковой стороны CD. Следовательно, $MN = \frac{1}{2}(AC + BD) = \frac{1}{2}(a+b)$.

Если $AB \parallel CD$, то $ABDC$ — прямоугольник. В этом случае $MN = AC = BD$.

2.148. Обозначим основания AD и BC трапеции $ABCD$ через a и b соответственно. Пусть $AB = a + b$, а биссектриса угла ABC пересекает боковую сторону CD в точке K, а прямую AD — в точке M (рис. 282). Поскольку треугольник ABM равнобедренный ($\angle AMB = \angle CBM = \angle ABM$), $AM = AB$, $DM = AM - AD = AB - AD = (a+b) - a = b$. Значит, треугольники BKC и MKD равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, K — середина CD. Аналогично докажем, что биссектриса угла BAD также проходит через точку K.

2.149. Середины M и N боковых сторон соответственно AB и CD трапеции $ABCD$ — центры указанных окружностей (рис. 283). Поскольку в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, сумма ее боковых сторон равна сумме оснований, а так как средняя линия трапеции равна полусумме оснований, то

$$MN = \frac{1}{2}(AC + BD) = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD = r + R,$$

где r и R — радиусы окружностей. Значит, расстояние между

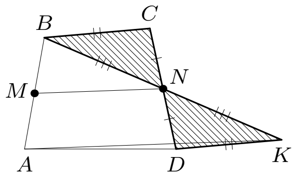


Рис. 284

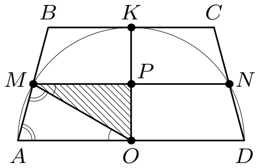


Рис. 285

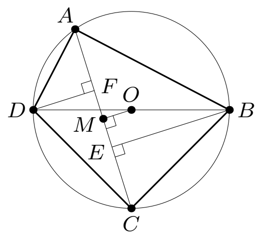


Рис. 286

центрами окружностей равно сумме их радиусов. Следовательно, окружности касаются.

2.150. Пусть M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ и $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$ (рис. 284). На продолжении отрезка BN за точку N отложим отрезок NK, равный BN. Из равенства треугольников BCN и KDN (по двум сторонам и углу между ними) следует, что $DK = BC$ и $DK \parallel BC$. Поскольку MN — средняя линия треугольника ABK, то $AK = 2MN = AD + BC = AD + DK$. Следовательно, точка D лежит на отрезке AK и $AD \parallel BC$.

2.151. $75°$, $75°$, $105°$, $105°$. ▮ Пусть окружность с центром O, построенная как на диаметре на большем основании AD трапеции $ABCD$, проходит через середины M и N боковых сторон AB и CD и касается меньшего основания BC в точке K (рис. 285). Если средняя линия MN пересекает радиус OK в точке P, то P — середина OK (см. задачу **2.139**) и $OP \perp MN$. В прямоугольном треугольнике OPM катет OP равен половине гипотенузы OM (радиус окружности), поэтому $\angle PMO = 30°$. Тогда угол AOM при вершине равнобедренного треугольника AOM также равен $30°$. Следовательно, $\angle BAD = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$. Аналогично, $\angle CDA = 75°$.

2.152. $30°$, $30°$, $150°$, $150°$.

2.153. Опустим из центра O окружности, описанной около данного четырехугольника, перпендикуляр OM на диагональ AC (рис. 286). Так как O — середина BD, то M — середина EF (см. задачу **2.145⁰**). Кроме того, M — середина AC, поэтому $CE = FA$.

2.154. Точки B, C, D, и E лежат на окружности с центром

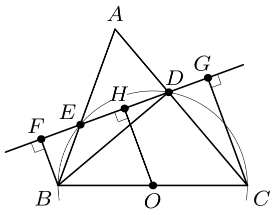


Рис. 287

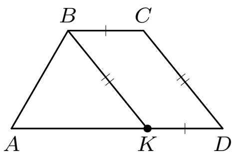


Рис. 288

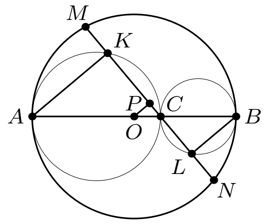


Рис. 289

в середине O стороны BC (рис. 287). Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на DE. Тогда $DH = HE$ и $GH = HF$, так как OH — средняя линия трапеции $BFGH$. Следовательно, $EF = DG$.

2.155. *Указание.* Через точку пересечения биссектрис проведите прямую, параллельную стороне треугольника.

2.156. Нет. ▌ Через вершину B меньшего основания BC трапеции $ABCD$ проведем прямую, параллельную боковой стороне CD, до пересечения с основанием AD в точке K (рис. 288). Тогда $AK = AD - DK = AD - BC$, $BK = CD$ (так как $BCDK$ — параллелограмм), $AD - BC = AK > |AB - BK| = |AB - CD|$, т. е. в любой трапеции разность оснований больше разности боковых сторон. Отсюда следует утверждение задачи.

2.157. Пусть P — проекция центра O окружности с диаметром AB на хорду MN этой окружности (рис. 289). Поскольку $\angle AKC = \angle BLC = 90°$, то K и L — проекции точек A и B на хорду MN, а так как O — середина AB, то P — середина KL (см. задачу **2.145⁰**). Кроме того, точка P делит хорду MN пополам. Следовательно, $KM = LN$.

§ 2.4

2.158. $2\sqrt{3}$, 2. **2.159.** $\frac{a}{\sin\alpha}$, $a\operatorname{ctg}\alpha$. **2.160.** $2\sqrt{3}$. **2.161.** $\frac{8}{\sqrt{3}}$. **2.162.** 13. **2.163.** $4\sqrt{3}$, $2\sqrt{19}$. **2.164.** $\sqrt{a(a+b)}$, $\sqrt{b(a+b)}$. **2.165.** $2a$, $2a\sqrt{7}$. **2.166.** 13, $2\sqrt{13}$, $3\sqrt{13}$, $5\sqrt{13}$. **2.167.** 8. **2.168.** 24. **2.169.** 12. **2.170.** $8\sqrt{2}$. **2.171.** 25, 20. **2.172.** 12, $12\sqrt{3}$, 24. **2.173.** 10. **2.174.** 6. **2.175.** 12. **2.176.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

2.177. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$.

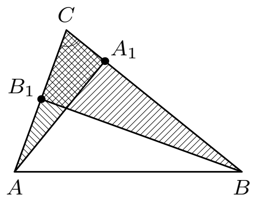


Рис. 290

2.180^0. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC (рис. 290). Тогда BB_1C и AA_1C — прямоугольные треугольники с общим острым углом α (это либо угол C, либо смежный с ним угол), поэтому $\frac{AA_1}{AC} = \sin\alpha = \frac{BB_1}{BC}$. Следовательно, $BC \cdot AA_1 = AC \cdot BB_1$.

2.181. $\frac{48}{5}$. *Указание.* Произведение искомой высоты на гипотенузу равно произведению катетов.

2.182. $\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}$. *Указание.* Произведение искомой высоты на боковую сторону равно произведению основания на проведенную к нему высоту.

2.183. $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$. **2.184.** $\frac{56}{5}$.

2.185^0. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник прямоугольный. ▌ Пусть стороны треугольника равны a, b и c, причем $a^2 + b^2 = c^2$. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a и b. Его гипотенуза по теореме Пифагора равна $\sqrt{a^2+b^2}$. Поэтому рассматриваемый треугольник равен данному по трем сторонам. Следовательно, и данный треугольник прямоугольный.

2.186. $\frac{24}{5}$. *Указание.* Через конец меньшего основания трапеции проведите прямую, параллельную боковой стороне. Эта прямая отсекает от трапеции треугольник со сторонами 6, 8 и 10. Этот треугольник прямоугольный.

2.187. $\sqrt{2(a+b)(a+2b)}$, $\sqrt{2a(a+b)}$ или $\sqrt{2(a+b)(2a+b)}$, $\sqrt{2b(a+b)}$.

2.188. 5, $2\sqrt{13}$.

2.189. $\sqrt{ab}$. ▌ Пусть вершины K и N квадрата $KLMN$ (рис. 291) расположены соответственно на катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC, вершины L и M — на гипотенузе AB, и при этом $AL = a$ и $BM = b$. Обозначим через x сторону квадрата. Углы AKL и MBN равны, так как каждый из них составляет 90° в сумме с углом A треугольника ABC,

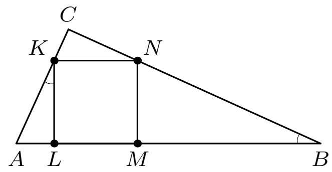


Рис. 291

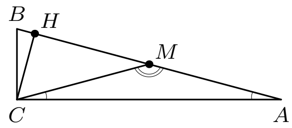


Рис. 292

поэтому $\frac{AL}{KL} = \operatorname{tg}\angle AKL = \operatorname{tg}\angle MBN = \frac{NM}{BM}$, поэтому $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$. Откуда $x^2 = ab$.

2.190. 9, 18, $9\sqrt{3}$.

2.191. $\frac{a(2\sqrt{3}-1)}{11}$. *Указание.* Обозначьте через x сторону квадрата и выразите через x отрезки, на которые вершины квадрата делят основание треугольника.

2.192. $4\sqrt{5}$, $8\sqrt{5}$. **2.193.** $2R\sin\alpha\cos\alpha$.

2.194. $\sqrt{a^2-b^2}$. *Указание.* Проекция диагонали равнобокой трапеции на большее основание равна средней линии трапеции.

2.195. 6. *Указание.* Через вершину меньшего основания трапеции проведите прямую, параллельную боковой стороне.

2.196. $\frac{2r}{\sin\alpha}$. *Указание.* Проведите высоту ромба из вершины большего угла.

2.197. $2\sqrt{3}$. *Указание.* Общая хорда перпендикулярна линии центров.

2.198. $\frac{a}{2\cos(\alpha/2)}$. *Указание.* Отрезок OM перпендикулярен хорде AB, делит ее пополам, а $\angle OAB = \frac{\alpha}{2}$.

2.199. $a\sqrt{3}$. **2.200.** $2(\sqrt{3}-1)$, $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$. **2.201.** $\frac{6h}{5}$.

2.202. $a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. *Указание.* Докажите, что $MN \parallel AC$, обозначьте сторону равностороннего треугольника через x, составьте уравнение относительно x.

2.203. $2R\sin\alpha$, $4R\sin\alpha\cos\alpha$.

2.205. Да. *Указание.* На луче DC возьмем точку C_1, из которой отрезок AB виден под прямым углом. Тогда $C_1D^2 = AD\cdot BD = CD^2$.

2.206. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $2-\sqrt{3}$. ▮ Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = 15°$ и $AB = 1$

(рис. 292). Пусть CH — его высота, CM — медиана. Тогда

$$CM = \frac{1}{2}, \qquad \angle CMB = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ, \qquad CH = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{4},$$
$$MH = \frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad AH = AM + MH = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{4},$$
$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{CH}{AH} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3};$$

$$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{(2+\sqrt{3})^2}{16}} = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{16}} =$$
$$= \sqrt{\frac{2(4+2\sqrt{3})}{16}} = \sqrt{\frac{2(\sqrt{3}+1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$
$$\sin 15^\circ = \frac{CH}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

2.207. $2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$. ▮ Обозначим через x и y катеты треугольника, к которым проведены медианы, равные a и b соответственно. Тогда $\frac{x^2}{4} + y^2 = a^2$ и $x^2 + \frac{y^2}{4} = b^2$. Сложив почленно эти равенства, получим: $\frac{5}{4}(x^2+y^2) = a^2+b^2$. Если c — гипотенуза треугольника, то $c^2 = x^2 + y^2 = \frac{4}{5}(a^2+b^2)$.

2.208. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$. *Указание.* Обозначьте части медиан от точки их пересечения до середин сторон через x и y и воспользуйтесь теоремой Пифагора.

2.209. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **2.210.** $\sqrt{2b(a+b)}$ или $\sqrt{2a(b+a)}$.

2.211. 6. *Указание.* CD — высота треугольника ACD.

2.212. 26, 39. **2.213.** $\frac{a\sqrt{2(1\pm\sin\alpha)}}{\cos\alpha}$.

2.214. 8, 15. *Указание.* Выразите катеты через радиус вписанной окружности и воспользуйтесь теоремой Пифагора.

2.215. 14, 12,5, 29,4, 16,9. ▮ Пусть биссектрисы тупых углов B и C пересекаются в точке P, принадлежащей большему основанию AD трапеции $ABCD$ (рис. 293). Обозначим $CD = DP = x$, $AB = AP = y$, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из вершин B и C на AD. Тогда

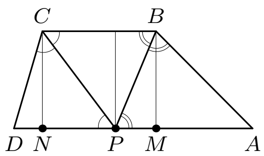


Рис. 293

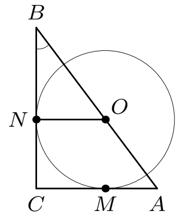


Рис. 294

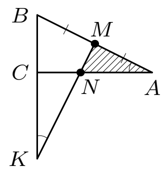


Рис. 295

$PN = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$, $PM = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$, $PC^2 - PN^2 = CD^2 - DN^2$, т. е. $15^2 - 9^2 = x^2 - (x-9)^2$. Отсюда находим, что $x = 12{,}5$. Аналогично, $PB^2 - PM^2 = AB^2 - AM^2$, т. е. $13^2 - 5^2 = y^2 - (y-5)^2$. Отсюда находим, что $y = 16{,}9$.

2.216. $a(\cos\alpha \pm \sin\alpha \operatorname{ctg}(\alpha+\beta))$.

2.217. $\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть M — середина AD. Тогда $MA = MD = MC$.

2.218. $\frac{12}{5}$. **2.219.** $\sqrt{4a^2 - b^2}$.

2.220. 12. ▮ Пусть O — центр окружности, x — ее радиус, M и N — точки касания с катетами AC и BC соответственно (рис. 294). Тогда $\frac{ON}{BN} = \operatorname{tg}\angle B = \frac{AC}{BC}$, или $\frac{x}{28-x} = \frac{21}{28}$. Откуда $x = 12$.

2.221. $4c$. ▮ Пусть M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC (рис. 295), N и K — точки пересечения перпендикуляра к AB, проходящего через точку M, с катетом AC и продолжением катета BC соответственно. Обозначим $AM = BM = x$, $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle BKM = \angle BAC = \alpha$, поэтому $\frac{MN}{AM} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{BM}{MK}$, или $\frac{c}{x} = \frac{x}{4c}$, откуда $x = 2c$.

2.222^{0}. $\sqrt{ab}$. ▮ Радиус, проведенный из центра O окружности в точку P касания окружности с боковой стороной AB, есть высота прямоугольного (см. задачу **2.129**) треугольника AOB, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу (рис. 296). Следовательно, $OP^2 = AP \cdot BP = ab$.

2.223. $\frac{10R}{3}$, $4R$, $2R$. ▮ Пусть K — точка касания вписанной окружности (с центром O) с большей боковой стороной AB трапеции $ABCD$ (рис. 297), M и N — точки касания с меньшим и бо́льшим основаниями AD и BC соответственно. Тогда $AK = AM = \frac{4R}{3} - R = \frac{R}{3}$, $AK \cdot BK = OK^2$, или $BK \cdot \frac{R}{3} = R^2$.

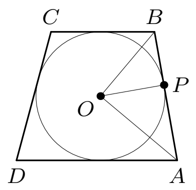


Рис. 296

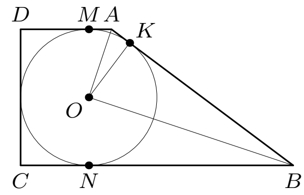


Рис. 297

Отсюда находим, что $BK = 3R$, $BC = CN + NB = R + 3R = 4R$, $AB = \frac{R}{3} + 3R = \frac{10R}{3}$.

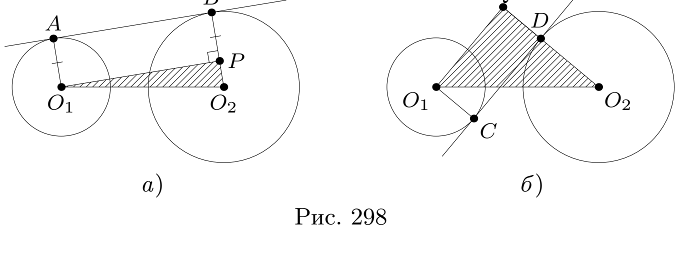
2.224. $\sqrt{a^2 - (R+r)^2}$, $\sqrt{a^2 - (R-r)^2}$. ▮ Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов r и R, A и B — точки касания с общей внешней касательной, C и D — с внутренней. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из O_1 на O_2B (рис. 298, *а*). Тогда $AB = O_1P = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2P^2} = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$. Пусть Q — основание перпендикуляра, опущенного из O_1 на продолжение O_2D (рис. 298, *б*). Тогда $CD = O_1Q = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2Q^2} = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$.

2.225. а) $2\sqrt{rR}$. ▮ Опустим перпендикуляр O_1P из центра O_1 на O_2B (рис. 299). В прямоугольном треугольнике O_1PO_2 известно, что

$$O_1O_2 = r + R, \quad O_2P = R - r, \quad O_1P = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2P^2} = 2\sqrt{rR}.$$

Поэтому $AB = O_1P = 2\sqrt{rR}$. Поскольку $MK = MB$ и $MK = MA$, то $NM = 2MK = AB = 2\sqrt{rR}$.

б) Поскольку MO_1 и MO_2 — биссектрисы смежных углов AMK и BMK, то угол O_1MO_2 — прямой. Поскольку



а) *б*)

Рис. 298

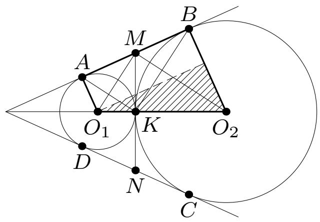


Рис. 299

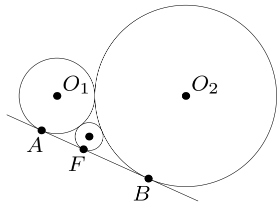


Рис. 300

$MA = MK = MB$, то точка K лежит на окружности с диаметром AB. Поэтому $\angle AKB = 90°$.

в) $\dfrac{Rr}{(\sqrt{R}\pm\sqrt{r})^2}$. ▮ Если x — радиус искомой окружности, которая касается прямой AB в точке F, то что $AF = 2\sqrt{rx}$ и $BF = 2\sqrt{Rx}$ (рис. 300). Если точка F лежит между A и B, то $AF + BF = AB$. Тогда, решив уравнение $2\sqrt{xr}+2\sqrt{Rx} = 2\sqrt{Rr}$, получим, что $x = \dfrac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$. В противном случае точка A лежит между точками B и F (так как $R > r$). Поэтому соответствующее уравнение примет вид $2\sqrt{xR}-2\sqrt{rx} = 2\sqrt{Rr}$. Следовательно, $x = \dfrac{Rr}{\sqrt{R}-\sqrt{r})^2}$. На рисунке 300 в этом случае точки A и F поменяются местами.

2.226. $\sqrt{a(a+b)}$, $\sqrt{b(a+b)}$. *Указание.* Если $BD = x$, то

$$\frac{x}{a} = \operatorname{tg}\angle BAD = \operatorname{tg}\angle BDC = \frac{b}{x}.$$

2.227. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. *Указание.* Через середину меньшего основания трапеции проведите прямые, параллельные боковым сторонам.

2.228. $|b-a|\sin\frac{\alpha}{2}$, $|b-a|\cos\frac{\alpha}{2}$, $|b-a|$, $|b-a|$. ▮ Пусть биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M, $\angle BAD = \alpha$ ($\alpha < 90°$), $AB = a$, $BC = b$ и $b > a$ (рис. 301). Тогда $\angle BMA = \angle MAD = \angle MAB = \frac{\alpha}{2}$. Следовательно, треугольник ABM — равнобедренный и $BM = AB = a$. Поэтому $MC = b - a$. Расстояние между проведенной биссектрисой и биссектрисой угла BCD равно $MC\sin\frac{\alpha}{2} = (b-a)\sin\frac{\alpha}{2}$. Аналогично найдем, что расстояние между биссектрисами углов B и D равно $(b-a)\cos\frac{\alpha}{2}$. Четырехугольник, ограниченный

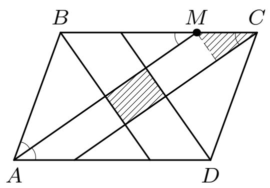


Рис. 301

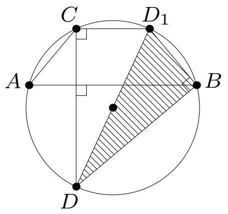


Рис. 302

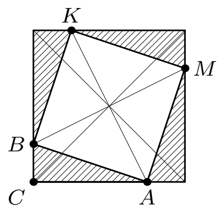


Рис. 303

указанными биссектрисами, — прямоугольник со сторонами, равными $(b-a)\sin\frac{\alpha}{2}$ и $(b-a)\cos\frac{\alpha}{2}$.

2.229. $\frac{4}{\sqrt{17}}$. *Указание.* CN — высота треугольника DCF.

2.230. $\sqrt{4p^2-q^2}$. *Указание.* Проведите окружность с центром D и радиусом p.

2.231. $\sqrt{4R^2-a^2}$. ▮ Проведем диаметр DD_1 (рис. 302). Тогда $CD_1 \parallel AB$. Следовательно, $AC = D_1B$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника DBD_1 находим, что $DB = \sqrt{DD_1^2 - BD_1^2} = \sqrt{4R^2-a^2}$.

2.232. $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$. ▮ Рассмотрим квадрат со стороной $a+b$ и расположим по его углам четыре треугольника, равных данному, так, чтобы их гипотенузы образовывали квадрат (рис. 303). Искомый отрезок равен половине диагонали большего квадрата, т. е. $\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$.

2.233. Пусть a, b и c — стороны треугольника, к которым проведены высоты, равные 12, 15 и 20 соответственно. Тогда $12a = 15b = 20c$, откуда $a = \frac{5c}{3}$ и $b = \frac{4c}{3}$. Заметим, что $c^2+b^2 = c^2+\frac{16c^2}{9} = \frac{25c^2}{9} = a^2$. Следовательно, треугольник со сторонами a, b и c — прямоугольный.

2.234. 7. ▮ Пусть M — произвольная точка плоскости, $ACBD$ — прямоугольник. Обозначим через x, y, z и t — расстояния от точки M до прямых AC, BC, DB и AD соответственно (рис. 304). Тогда

$$MA^2+MB^2 = (x^2+t^2)+(y^2+z^2) = \\ = (x^2+y^2)+(t^2+z^2) = MC^2+MD^2,$$

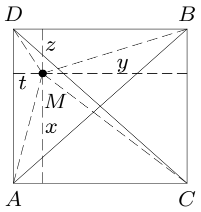


Рис. 304

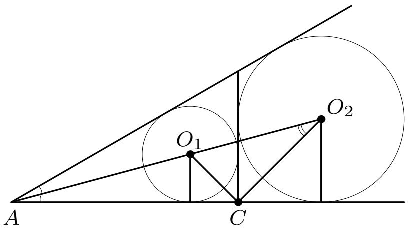


Рис. 305

откуда

$$DM^2 = MA^2 + MB^2 - MC^2 = 225 + 400 - 576 = 49.$$

2.235. $\sqrt{\frac{88-48\sqrt{3}}{3}}$. *Указание.* Пусть M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники AMC и BMC. Тогда O_1O_2 — гипотенуза прямоугольного треугольника O_1MO_2.

2.236. $2r\sqrt{2}$. ▌ Пусть O_1 — центр вписанной окружности, а O_2 — центр вневписанной, C — вершина прямого угла, $\angle A = 30^\circ$ (рис. 305). Тогда треугольник O_1CO_2 — прямоугольный. Поскольку точки O_1 и O_2 расположены на биссектрисе угла A, то $\angle O_1O_2C = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$. Следовательно, $O_1O_2 = 2O_1C = 2r\sqrt{2}$.

2.237. а) 2, 15, 3, 10. *Указание.* Если a и b — катеты прямоугольного треугольника, а c — гипотенуза, то искомые радиусы равны $\frac{a+b-c}{2}$, $\frac{a+b+c}{2}$, $\frac{a+c-b}{2}$ и $\frac{b+c-a}{2}$.

б) 3, 12, 8, 8. ▌ Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC ($AC = BC = 10$, $AB = 12$), r — ее радиус, r_1, r_2 и r_3 — радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон AB, BC и AC соответственно (рис. 306), O_1, O_2 и O_3 — их центры, p — полупериметр треугольника ABC.

Высота CK треугольника ABC равна 8. Если вписанная окружность касается стороны AC треугольника ABC в точке P, то $OP = OK = r$, $\frac{OP}{OC} = \sin\angle ACK = \frac{AK}{AC}$, или $\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}$, откуда находим, что $r = 3$.

Если окружность с центром O_1 касается продолжения стороны BC в точке M, то $BM = BK = 6$, $CM = CB + BM = 16$,

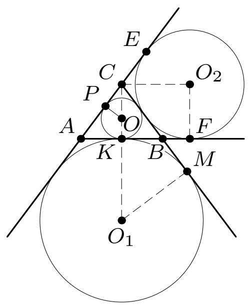


Рис. 306

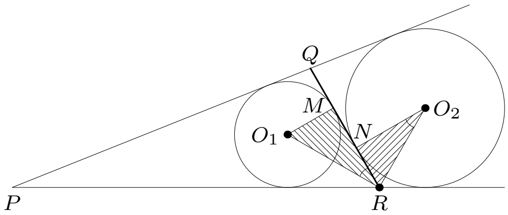


Рис. 307

и $\dfrac{O_1M}{MC} = \operatorname{tg}\angle BCK = \dfrac{BK}{KC}$, откуда $r_1 = O_1M = BK \cdot \dfrac{MC}{KC} = 6 \cdot \dfrac{16}{8} = 12$.

Пусть окружность с центром O_2 касается продолжения стороны AB в точке F, а продолжения стороны AC — в точке E. Поскольку CO_2 — биссектриса угла BCE, а CK — биссектриса его смежного угла ACB, то $\angle O_2CK = 90^\circ$. Поэтому O_2CKF — прямоугольник. Следовательно, $r_3 = r_2 = O_2F = CK = 8$.

2.238. $\sqrt{3}$. ▮ Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов 2 и 3 соответственно, M и N — их точки касания со стороной RQ (рис. 307). Тогда

$$RM = O_1M \operatorname{ctg}\angle MRO_1 = 2\operatorname{ctg}30^\circ = 2\sqrt{3},$$
$$RN = O_2N \operatorname{ctg}\angle NRO_2 = 3\operatorname{ctg}60^\circ = \sqrt{3}.$$

Поэтому $MN = RM - RN = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

2.239. 30°, 90°. ▮ Пусть окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC (рис. 308), касается сторон AB и BC в точках M и P соответственно, а вторая окружность с центром Q касается стороны BC в точке F, а продолжения стороны AB — в точке N. Поскольку центры этих окружностей расположены на биссектрисе угла BAC, то $OQ = AQ - AO = 2QN - 2OM = 2\sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3} + 2 = 4$. Пусть D — точка пересечения отрезка OQ со стороной BC, а K — проекция точки O на прямую QF. Тогда $QK = QF + FK = QF + OP = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1 = 2\sqrt{3}$.

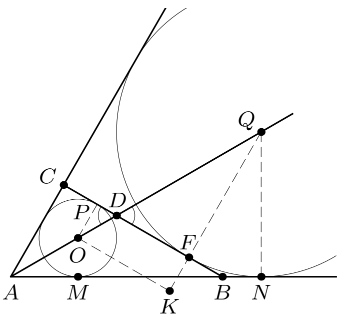


Рис. 308

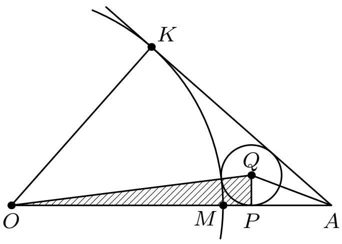


Рис. 309

Поэтому

$$\sin\angle PDO = \sin\angle QOK = \frac{QK}{OQ} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

значит, $\angle CDA = \angle PDO = 60^\circ$. Следовательно, $\angle ABC = \angle CDA - \angle BAD = 30^\circ$, а $\angle ACB = 90^\circ$.

2.240. $2 - \frac{4}{3}\sqrt{2}$. ▌ Пусть Q — центр искомой окружности, x — ее радиус, P — точка касания искомой окружности с отрезком AM (рис. 309). Тогда

$$OA = \frac{OK}{\sin 60^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}, \qquad AP = QP\operatorname{ctg}\angle PAQ = x\operatorname{ctg} 30^\circ = x\sqrt{3},$$

$$OQ = 2 + x, \qquad OP^2 = OQ^2 - QP^2 = (2+x)^2 - x^2 = 4 + 4x.$$

Поскольку $OP + AP = OA$, имеем уравнение $\sqrt{4+4x} + x\sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, или $\sqrt{12+12x} = 4 - 3x$, откуда $x = 2 - \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

2.241. $\frac{15}{4}$, $\frac{20}{3}$. ▌ Пусть A и B — указанные точки касания ($AC = 6$, $BC = 8$). Поскольку треугольник ABC прямоугольный (угол C — прямой), то $AB = 10$. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из центра O окружности на хорду BC этой окружности. Углы MBO и CAB равны, так как каждый из них в сумме с углом ABC составляет 90°. Если $\angle BAC = \alpha$, то $\frac{AC}{AB} = \cos\alpha = \frac{BM}{OB}$, откуда находим, что $BO = AB \cdot \frac{BM}{AC} = 10 \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{3}$. Аналогично находим радиус второй окружности.

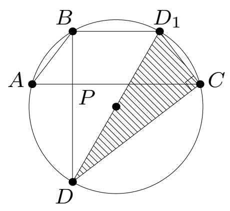


Рис. 310

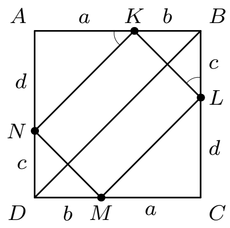


Рис. 311

2.242. $8R^2$, $4R^2$. ▮ Проведем диаметр DD_1 (рис. 310). Тогда $BD_1 \parallel AC$. Следовательно, $AB = D_1C$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника DCD_1 находим, что $AB^2 + CD^2 = D_1C^2 + DC^2 = DD_1^2 = 4R^2$. Аналогично, $BC^2 + AD^2 = 4R^2$. Следовательно,

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 8R^2,$$

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = (AP^2 + BP^2) + (CP^2 + DP^2) = \\ = AB^2 + CD^2 = 4R^2.$$

2.243. 1. ▮ Стороны треугольника с вершинами в центрах данных окружностей равны 3, 4, 5. Значит, он прямоугольный. Радиус его вписанной окружности равен $\frac{3+4-5}{2} = 1$. Эта окружность проходит через точки касания трех данных окружностей. Других таких окружностей нет.

2.244. Пусть вершины K, L, M и N прямоугольника $KLMN$ расположены соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$ (рис. 311). Обозначим $AK = a$, $BK = b$, $BL = c$ и $CL = d$. Тогда $CM = a$, $DM = b$, $DN = c$ и $AN = d$, причем $a \neq c$, так как в противном случае $KLMN$ — квадрат. Тогда

$$\frac{d}{a} = \frac{AN}{AK} = \operatorname{tg} \angle AKN = \operatorname{tg} \angle BLK = \frac{BK}{BL} = \frac{b}{c},$$

значит, $ab = cd$. Кроме того, $a + b = c + d$. Из полученных равенств следует, что либо $a-b = c-d$, что невозможно, либо $a-b = d-c$. В последнем случае $a = d$ и $b = c$. Тогда $\angle AKN = 45°$ и $\angle BKL = 45°$. Следовательно, $KN \parallel BD$ и $KL \parallel AC$.

2.245. Прямая, перпендикулярная AB.

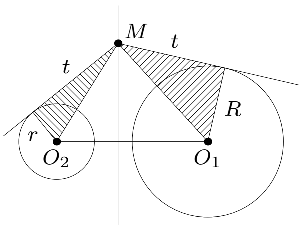


Рис. 312

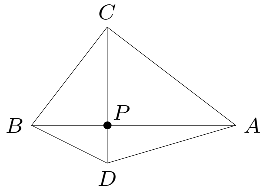


Рис. 313

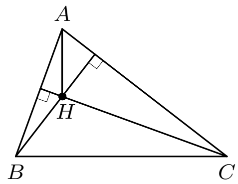


Рис. 314

2.246. Прямая, перпендикулярная линии центров, или часть такой прямой. ▮ Пусть R и r — радиусы данных окружностей с центрами O_1 и O_2 соответственно (рис. 312), M — точка, для которой выполнено данное условие. Если t — длина касательных, то $O_1M^2 = t^2 + R^2$, $O_2M^2 = t^2 + r^2$. Это означает, что точка M лежит на перпендикуляре к O_1O_2, для которого $O_1M^2 - O_2M^2 = R^2 - r^2$. При этом в наше геометрическое место входят все точки этого перпендикуляра, если окружности расположены одна вне другой. Для пересекающихся окружностей исключается их общая хорда.

2.247. *Необходимость.* Пусть прямые AB и CD перпендикулярны (рис. 313). Если P их точка пересечения, то по теореме Пифагора $AC^2 - BC^2 = AP^2 - BP^2 = AD^2 - BD^2$, откуда $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

Достаточность. Пусть $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$. Рассмотрим отрезок AB. Известно, что геометрическое место точек X, для которых разность $AX^2 - BX^2$ постоянна, есть перпендикуляр к отрезку AB. Поскольку точки C и D удовлетворяют этому условию, они лежат на этом перпендикуляре. Следовательно, $AB \perp CD$.

2.248. Пусть высоты треугольника ABC, проведенные из вершин B и C, пересекаются в точке H (рис. 314). Тогда по предыдущей задаче $AC^2 + BH^2 = BC^2 + AH^2$ и $AB^2 + CH^2 = BC^2 + AH^2$, поэтому $AC^2 + BH^2 = AB^2 + CH^2$. Следовательно, $AH \perp BC$, т. е. высота, проведенная из вершины A, проходит через точку H.

2.249. $\frac{8}{5}R^2$. ▮ Обозначим $AB = x$, $BC = 2x$, $CD = y$, $AD = z$ (рис. 315). Поскольку диагонали четырехугольника

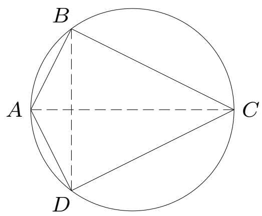


Рис. 315

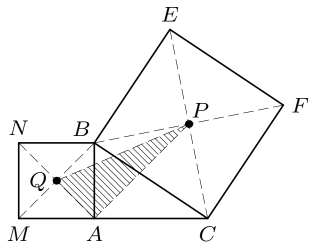


Рис. 316

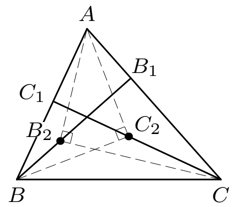


Рис. 317

взаимно перпендикулярны, суммы квадратов его противоположных сторон равны между собой, т. е. $x^2 + y^2 = z^2 + 4x^2$, а так как в четырехугольник можно вписать окружность, то $x + y = z + 2x$. Возведя обе части этого равенства в квадрат и вычитая результат почленно из предыдущего, найдем, что $y = 2z$. Из равенства $x + y = z + 2x$ следует, что $z = x$ и $y = 2x$. Поскольку точки A и C равноудалены от концов хорды BD, хорда AC — диаметр окружности. Поэтому $\angle ABC = 90°$. Из уравнения $x^2 + 4x^2 = 4R^2$ находим, что $x^2 = \frac{4}{5}R^2$. Следовательно, $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2x^2 = \frac{8}{5}R^2$.

2.250. $\sqrt{\frac{a^2}{2} + ab + b^2}$. ▌ Пусть P и Q — центры квадратов $BEFC$ и $ABNM$ соответственно (рис. 316). Тогда $AQ = \frac{b}{\sqrt{2}}$, а из задачи **2.232** следует, что $AP = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Из прямоугольного треугольника QAP находим

$$PQ^2 = AQ^2 + AP^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} + ab + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} + ab + b^2.$$

2.251. В прямоугольных треугольниках AB_2C и AC_2B (рис. 317) отрезки B_2B_1 и C_2C_1 — высоты, проведенные из вершин прямых углов, поэтому $AB_2 = AC \cdot AB_1$ и $AC_2 = AB \cdot AC_1$. С другой стороны, $\frac{AB_1}{AB} = \cos\angle A = \frac{AC_1}{AC}$, откуда $AB_1 \cdot AC = AC_1 \cdot AB$. Следовательно, $AB_2^2 = AC_2^2$ и $AB_2 = AC_2$.

§ 2.5

2.252. $\sqrt{2}$. **2.253.** $AB = AC = \sqrt{130}$.

2.254. Стороны треугольника равны $\sqrt{80}$, $\sqrt{205}$, $\sqrt{125}$.

2.255. *Указание.* $AB + BC = AC$.

2.256. $(8; 3)$. **2.257.** а) $(-1; -3)$; б) $(1; 3)$; в) $(1; -3)$; г) $(7; -1)$; д) $(3; -1)$; е) $(-3; 1)$.

2.258. *Указание.* Диагонали четырехугольника $ABCD$ равны и делятся точкой пересечения пополам.

2.259. B. **2.260.** а) $y - 1 = 0$; б) $x + 3 = 0$. **2.261.** $\frac{\sqrt{410}}{4}$. **2.262.** $2x - 3y + 12 = 0$. **2.263.** $x - 1 = 0$.

2.264. $\left(\frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right)$, $(-5; -1)$, $\left(\frac{7}{2}; -1\right)$.

2.265. AB: $x + 2 = 0$; AC: $x - 2y + 6 = 0$; BC: $x - y = 0$.

2.266. $x - 2y - 2 = 0$. **2.267.** $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$.

2.268. а) $(3; -2)$, $R = 4$; б) $(1; -3)$, $R = 5$; в) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $R = 1$.

2.269. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$. **2.270.** $3\sqrt{10}$. **2.271.** $(-3; 4)$.

2.272. $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ или $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. *Указание.* Уравнение искомой окружности имеет вид $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$.

2.273. $(3; 3)$, $(-3; 5)$.

2.274. Точка B лежит на окружности, точки A и D — внутри, точка C — вне окружности.

2.275. $(-2; 3)$. *Указание.* Примените теорему о пропорциональных отрезках.

2.276. $(3; 1)$. **2.277.** $(4; 1)$. **2.281.** $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - 2\right)^2 = \frac{125}{4}$.

2.282. $3x + 4y - 28 = 0$ или $y - 7 = 0$. *Указание.* Уравнение искомой касательной имеет вид $y = kx + 7$. Подставив в уравнение окружности $kx + 7$ вместо y, получим квадратное уравнение относительно x. Его дискриминант должен быть равен 0.

2.283⁰. *Указание.* Если одна из двух перпендикулярных прямых образует с осью абсцисс острый угол α, то вторая — тупой угол $90^\circ + \alpha$.

2.284. *Указание.* Составьте уравнения прямых AC и BD и убедитесь, что произведение их угловых коэффициентов равно -1.

2.285. $2x + y - 2 = 0$. **2.286.** $x + 3y - 9 = 0$. **2.287.** $(3; -5)$.

2.288. Пусть стороны данного прямоугольника равны a и b. Поместим начало координат в одну из вершин прямоугольника, а оси координат направим по двум его соседним сторонам (рис. 318). Тогда точки $A(0; 0)$, $B(0; b)$, $C(a; b)$ и $D(a; 0)$ —

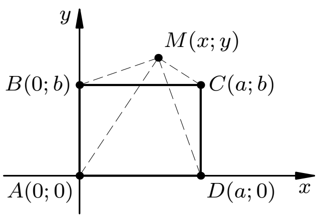


Рис. 318

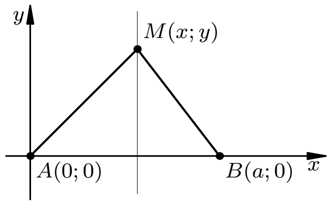


Рис. 319

вершины прямоугольника. Если $M(x; y)$ — произвольная точка плоскости, то

$$MA^2 + MC^2 = (x^2 + y^2) + ((x-a)^2 + (y-b)^2),$$
$$MB^2 + MD^2 = (x^2 + (y-b)^2) + ((x-a)^2 + y^2),$$

следовательно,

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

2.289. Прямая, перпендикулярная отрезку с концами в данных точках. ▮ Пусть расстояние между данными точками A и B равно a. Поместим начало координат в точку A, ось абсцисс направим вдоль луча AB, а ось ординат — вдоль луча AY, перпендикулярного AB (рис. 319). Тогда точка A имеет координаты $(0; 0)$, а точка B — $(a; 0)$. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка плоскости, для которой $AM^2 - BM^2 = c > 0$. Тогда $(x^2 + y^2) - ((x-a)^2 + y^2) = c$, или $x = \frac{a^2+c}{2a}$, а это уравнение прямой, перпендикулярной оси абсцисс.

2.290. Окружность (при $k \neq 1$) или прямая (при $k = 1$). ▮ Пусть расстояние между данными точками A и B равно a. Поместим начало координат в точку A, ось абсцисс направим вдоль луча AB, а ось ординат — вдоль луча AY, перпендикулярного AB (рис. 319). Тогда точка A имеет координаты $(0; 0)$, а точка B — $(a; 0)$. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка плоскости. Если $k = 1$, получим геометрическое место точек, равноудаленных от A и B, т. е. прямую $x = \frac{1}{2}a$. Пусть $k \neq 1$. Условие $AM = kBM$ равносильно условию $AM^2 = k^2 \cdot BM^2$, или $x^2 + y^2 = k^2(x-a)^2 + k^2y^2$. После раскрытия скобок, приведения подобных и выделения полного квадрата получим уравнение

$$\left(x - \frac{ak^2}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $\left(\frac{ak^2}{k^2-1}; 0\right)$ и радиусом $\frac{ak}{|k^2-1|}$ (*окружность Аполлония*).

2.291. При $d > \frac{1}{2}a^2$ — окружность, при $d = \frac{1}{2}a^2$ — точка, при $d < \frac{1}{2}a^2$ — пустое множество (a — расстояние между данными точками A и B). ▌ Поместим начало координат в точку A, ось абсцисс направим вдоль луча AB, а ось ординат — вдоль луча AY, перпендикулярного AB (рис. 319). Тогда точка A имеет координаты $(0; 0)$, а точка B — $(a; 0)$. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка плоскости. Условие $AM^2 + BM^2 = d$ равносильно условию $x^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = d$. После раскрытия скобок, приведения подобных и выделения полного квадрата получим уравнение $\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(2d - a^2)$. Если $d > \frac{1}{2}a^2$ — это уравнение окружности с центром в точке $\left(\frac{1}{2}a; 0\right)$ и радиусом $\frac{1}{2}\sqrt{2d - a^2}$, при $d = \frac{1}{2}a^2$ получим точку $\left(\frac{1}{2}a; 0\right)$. В остальных случаях получим пустое множество.

2.292. Пусть $b \neq 0$. Тогда уравнение данной прямой можно представить в виде $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Уравнение прямой, проходящей через точку M перпендикулярно данной прямой, имеет вид $y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$. Запишем уравнение данной прямой в виде $a(x - x_0) + b(y - y_0) + ax_0 + by_0 + c = 0$. Решив систему двух последних уравнений относительно $x - x_0$ и $y - y_0$, получим

$$x - x_0 = -\frac{a}{a^2+b^2}(ax_0 + by_0 + c),$$
$$y - y_0 = -\frac{b}{a^2+b^2}(ax_0 + by_0 + c),$$

где x и y — координаты точки H пересечения прямых. Тогда квадрат искомого расстояния равен

$$MH^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2+b^2}.$$

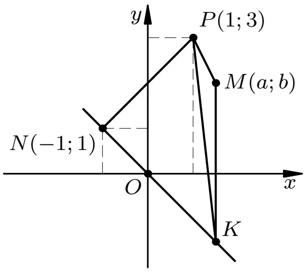


Рис. 320

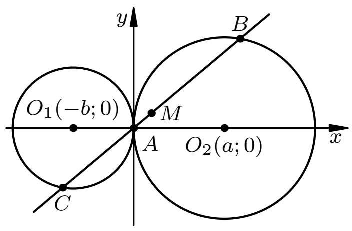


Рис. 321

2.293. $\frac{9}{\sqrt{10}}$. **2.294.** $(x-3)^2+(y-2)^2=20$. **2.295.** 5.

2.296. $x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2$, $y=(1-\lambda)y_1+\lambda y_2$.

2.297. Пусть прямые AB и $ax+by+c=0$ пересекаются в точке C. Обозначим $AC:AB=\lambda$. Докажем, что $0<\lambda<1$. Это будет означать, что точка C расположена между точками A и B, т. е. точки A и B лежат по разные стороны от данной прямой. Точка C имеет координаты $x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2$, $y=(1-\lambda)y_1+\lambda y_2$ (см. задачу **2.296**). Подставляя их в уравнение данной прямой, находим, что $\lambda=1\Big/\Big(1-\frac{ax_2+by_2+c}{ax_1+by_1+c}\Big)$, а так как $\frac{ax_2+by_2+c}{ax_1+by_1+c}<0$, то $0<\lambda<1$. Что и требовалось доказать.

2.298. $2\sqrt{2}$. ▮ Рассмотрим на координатной плоскости xOy (рис. 320) точку $M(a;b)$. Пусть d — расстояние от этой точки до прямой $x+y=0$, а c — до точки $P(1;3)$. Тогда $d=\frac{|a+b|}{\sqrt{2}}$, $c=\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}$. Если K — точка пересечения прямых $x+y=0$ и $x=a$, то $MK=d\sqrt{2}=|a+b|$. Точка $N(-1;1)$ — проекция точки P на прямую $x+y=0$. Тогда $|a+b|+\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}=MK+MP\geqslant KP\geqslant PN=2\sqrt{2}$, причем равенство достигается, когда точка M совпадает с точкой N.

2.299. Окружность. ▮ Пусть a и b — радиусы окружностей. Поместим начало координат в точку A, ось абсцисс направим по линии центров окружностей (рис. 321), ось ординат — по лучу AY, перпендикулярному линии центров. Пусть $(a;0)$ и $(-b;0)$ — координаты центров окружностей и $a>b$. Тогда уравнения окружностей имеют вид $(x-a)^2+y^2=a^2$ и $(x+b)^2+y^2=b^2$. Уравнение прямой, отличной от оси ординат и

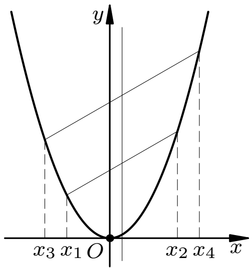


Рис. 322

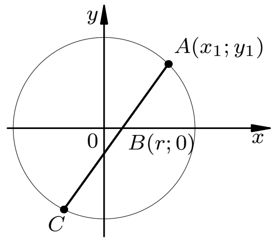


Рис. 323

проходящей через точку A, имеет вид $y = kx$. Подставив kx вместо y в уравнение каждой из окружностей, найдем координаты отличных от A точек B и C пересечения этой прямой с окружностями: $B\left(\frac{2a}{k^2+1}; \frac{2ka}{k^2+1}\right)$, $C\left(-\frac{2b}{k^2+1}; -\frac{2kb}{k^2+1}\right)$. Если x — абсцисса точки M, середины отрезка BC, то $x = \frac{a-b}{k^2+1} > 0$. Отсюда находим, что $k^2 = \frac{a-b-x}{x}$. Если $k > 0$, то $y^2 = k^2x^2$, или $y^2 = x(a-b-x)$. После раскрытия скобок, приведения подобных и выделения полного квадрата получим уравнение $\left(x - \frac{a-b}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{(a-b)^2}{4}$. Это уравнение верхней полуокружности с центром в точке $\left(\frac{a-b}{2}; 0\right)$ и радиусом $\frac{a-b}{2}$. Для $k < 0$ получим уравнение нижней полуокружности с теми же центром и радиусом.

2.300. Пусть некоторая прямая пересекает параболу $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а параллельная ей прямая — в точках с абсциссами x_3 и x_4 (рис. 322). Тогда

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{x_4^2 - x_3^2}{x_4 - x_3} = k,$$

где k — угловой коэффициент прямых. Отсюда следует, что $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, или $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{x_3+x_4}{2}$, т. е. абсциссы середин отрезков параллельных прямых, высекаемых данной параболой, совпадают. Следовательно, прямая, проходящая через середины таких отрезков, параллельна оси ординат. Отсюда вытекает нужное построение.

2.301. Пусть точка $A(x_1; y_1)$ лежит на данной окружности и числа x_1 и y_1 рациональны (рис. 323). На отрезке $[-\sqrt{R}; \sqrt{R}]$

возьмем произвольное рациональное число r. Проведем прямую через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(r; 0)$. Ее уравнение имеет вид $ax + by + c = 0$, где числа a, b и c рациональны. Выразим одно из неизвестных x или y из этого уравнения и подставим в уравнение данной окружности. Получим квадратное уравнение с рациональными коэффициентами. Один его корень — рациональное число (одна из координат точки A), значит, второй корень — также рациональное число (это следует из теоремы Виета). Вторая координата полученной точки C пересечения прямой и окружности находится из уравнения $ax + by + c = 0$, поэтому она рациональна. Таким образом, каждому рациональному числу r из отрезка $[-\sqrt{R}; \sqrt{R}]$ соответствует рациональная точка C, лежащая на данной окружности, причем различным r соответствуют различные точки C. Следовательно, на данной окружности бесконечно много рациональных точек.

§ 2.6

2.305. Пусть O — центр симметрии четырехугольника $ABCD$ (рис. 324). Поскольку при движении прямая переходит в прямую, то точка пересечения двух прямых переходит в точку пересечения их образов. Следовательно, вершина четырехугольника переходит в вершину. Пусть вершина A переходит в вершину C, а B — в D. Тогда отрезки AC и BD пересекаются в точке O и делятся ею пополам. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм.

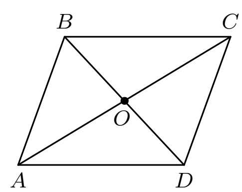


Рис. 324

2.306. *Указание.* Рассмотрите симметрию относительно центра параллелограмма.

2.307. *Указание.* Если все стороны четырехугольника равны, а все углы прямые, то это квадрат.

2.308. а) $M_1(-x; -y)$; б) $M_2(2a - x; 2b - y)$. **2.309.** $(a; b)$.

2.310. Поскольку у многоугольника, имеющего центр симметрии, четное число вершин $2n$, то сумма его внутренних углов равна $180° \cdot (2n - 2) = 180° \cdot 2(n - 1) = 360° \cdot (n - 1)$.

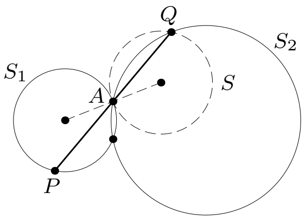


Рис. 325

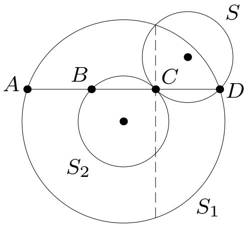


Рис. 326

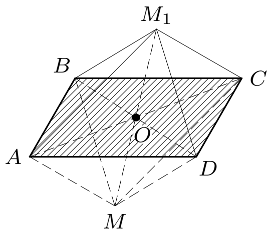


Рис. 327

2.311. *Указание.* Постройте образ одной из сторон данного угла при симметрии относительно данной точки.

2.312. Предположим, что нужная прямая проведена (рис. 325). Пусть $PA = QA$ — равные хорды окружностей S_1 и S_2, лежащие на этой прямой. При симметрии относительно точки A точка P переходит в точку Q, а окружность S_1 — в равную ей окружность S, проходящую через точку Q.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Строим окружность S, симметричную данной окружности S_1 относительно данной точки A. Точка пересечения окружностей S и S_2, отличная от A, лежит на искомой прямой.

2.313. Предположим, что задача решена. Пусть A, B, C и D — последовательные точки пересечения проведенной прямой (рис. 326) с окружностями S_1 и S_2 (A и D лежат на S_1, а B и C — на S_2), и $AB = BC = CD$. При симметрии относительно точки C точка B переходит в точку D, а окружность S_2 в равную ей окружность, проходящую через точку D.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Строим образ S меньшей окружности S_2 при симметрии относительно ее произвольной точки C. Если D — общая точка окружностей S и S_1, то прямая CD — искомая.

2.314. Пусть M_1 — образ точки M при симметрии относительно точки O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 327). При этой симметрии вершина A переходит в вершину C. Следовательно, прямая M_1C параллельна прямой MA. Аналогично докажем, что прямые M_1A, M_1B и M_1D соответственно параллельны MC, MD и MB. Поскольку через данную точку, не лежащую на прямой, проходит

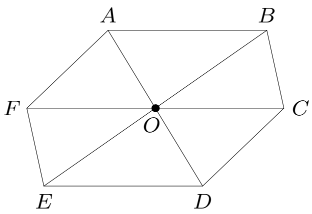


Рис. 328

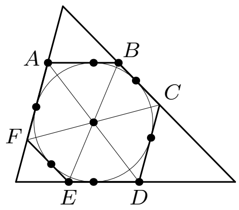


Рис. 329

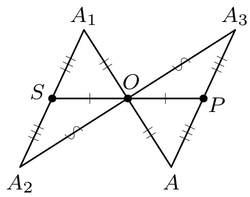


Рис. 330

единственная прямая, параллельная этой прямой, то утверждение доказано.

2.315. При симметрии относительно середины O диагонали AD данного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 328) вершина A перейдет в вершину D, луч AB — в луч DE, а так как $BA = DE$, то точка B перейдет в точку E. Аналогично докажем, что вершина F при этой симметрии перейдет в вершину C. Следовательно, при симметрии относительно точки O данный шестиугольник перейдет сам в себя.

2.316. $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$, $\frac{c}{3}$.

2.317. Пусть AB, CD и EF — стороны рассматриваемого шестиугольника $ABCDEF$, лежащие на указанных касательных (рис. 329). При симметрии относительно центра вписанной окружности данного треугольника прямая AB переходит в прямую DE, а прямая BC — в прямую EF. Поэтому точка B пересечения прямых AB и BC переходит в точку E пересечения прямых DE и EF. Аналогично докажем, что при этой симметрии вершина A переходит в вершину D, а вершина F — в вершину C. Следовательно, центр окружности есть центр симметрии шестиугольника $ABCDEF$. Поэтому $AB = ED$, $BC = FE$ и $CD = FA$.

2.318. *Указание.* Рассмотрите симметрию относительно точки O.

2.319. Нет. ▮ *Первый способ.* Пусть S и O — центры симметрии фигуры (рис. 330). Рассмотрим образ P точки S при симметрии относительно точки O. Докажем, что точка P — также центр симметрии фигуры. Пусть A — произвольная точка фигуры. Тогда образ A_1 точки A при симметрии относительно точки O принадлежит фигуре. Фигуре также принадлежит образ A_2 точки A_1 относительно точки S и образ A_3 точки A_2 при симметрии относительно точки O. Тогда $AP = SA_1$ и $AP \parallel SA_1$, $PA_3 = A_2S$ и $PA_3 \parallel A_2S$. Поэтому $AP = PA_3$, и точки A, A_3 и P лежат на данной прямой. Следовательно, точка A_3, симметричная точке A фигуры относительно точки P, также принадлежит фигуре, т.е. $P-$ центр симметрии этой фигуры. Аналогично можно построить любое число центров симметрии фигуры.

Второй способ. Пусть $S(a; b)$ и $O(c; d)$ — центры симметрии фигуры. Тогда $P(2c-a; 2d-b)$ — образ точки S при симметрии относительно точки O. Докажем, что точка P — также центр симметрии фигуры. Пусть $A(x; y)$ — произвольная точка фигуры. Тогда $A'(4c-2a-x; 4d-2b-y)$ — ее образ при симметрии относительно точки P. Докажем, что точка A' принадлежит данной фигуре. Отобразим точку A относительно точки O. Получим точку $A_1(2c-x; 2d-y)$, принадлежащую данной фигуре. Отобразим точку A_1 относительно точки S. Получим точку $A_2(2a-2c+x; 2b-2d+y)$, принадлежащую данной фигуре. Наконец, отобразим точку A_2 относительно точки O. Получим точку $A_3(4c-2a-x; 4d-2b-y)$, также принадлежащую данной фигуре. Но точка A_3 совпадает с точкой A'.

2.320. Середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма. При симметрии относительно точки пересечения диагоналей этого параллелограмма рассматриваемые перпендикуляры переходят в серединные перпендикуляры к сторонам данного четырехугольника. Поскольку

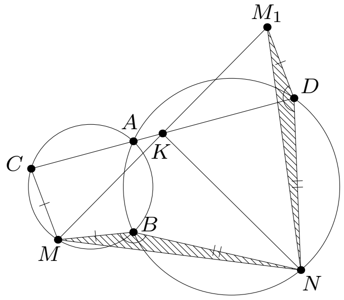


Рис. 331

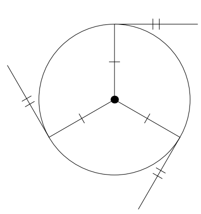


Рис. 332

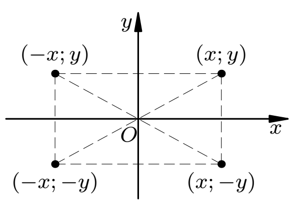


Рис. 333

четырехугольник вписанный, то эти серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке — центре описанной окружности. Следовательно, рассматриваемые перпендикуляры также пересекаются в одной точке.

2.321. При симметрии относительно точки K точка C переходит в точку D, а точка M — в некоторую точку M_1, причем отрезки DM_1 и CM равны и параллельны (рис. 331). Тогда $BM = CM = DM_1$, $BN = DN$. Обозначим $\angle CDM_1 = \alpha$, $\angle CDN = \beta$. Тогда

$$\angle ACM = \alpha, \qquad \angle ABM = 180^\circ - \alpha, \qquad \angle ABN = 180^\circ - \beta,$$
$$\angle MBN = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \alpha + \beta = \angle NDM_1.$$

Значит, треугольники MBN и M_1DN равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $NM = NM_1$. В равнобедренном треугольнике MNM_1 медиана NK является высотой, следовательно, $\angle MKN = 90^\circ$.

2.325. *Указание.* Рассмотрите симметрию относительно прямой MN.

2.326. $a + b$ или $a - b$.

2.327. Да. Например, латинская буква Z.

2.328. Да (рис. 332).

2.329. а) $N(-x; y)$; б) $N(x; -y)$; в) $N(2a-x; y)$; г) $N(x; 2b-y)$; д) $N(y; x)$; е) $N(-y; -x)$.

2.330. Верно. ▮ Примем оси симметрии за оси координат Ox и Oy (рис. 333). Тогда если точка $(x; y)$ принадлежит фигуре, то ей также принадлежат точки $(-x; y)$ (симметрия относительно оси Oy), и $(-x; -y)$ (симметрия относительно Ox). Следовательно, точка $(0; 0)$ — центр симметрии.

2.331. Нет. ▮ Докажем сначала, что если фигура имеет ровно две оси симметрии, то они взаимно перпендикулярны. Действительно, пусть l_1 и l_2 — оси симметрии фигуры. Предположим, что они не перпендикулярны. Тогда прямая, симметричная l_2 относительно l_1, — также ось симметрии, не совпадающая ни с l_1, ни с l_2. Получили противоречие. Если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии (см. задачу **2.330**).

2.332. Верно. ▮ Если фигура имеет ровно две оси симметрии, то они взаимно перпендикулярны (см. задачу **2.331**). Если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии (см. задачу **2.331**). Поэтому данный четырехугольник — параллелограмм. Его оси симметрии взаимно перпендикулярны и являются либо диагоналями, либо серединными перпендикулярами к сторонам. Следовательно, четырехугольник является либо ромбом, либо прямоугольником.

2.333. Нет. ▮ Если фигура имеет ровно две оси симметрии, то они взаимно перпендикулярны (см. задачу **2.331**). Если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии (см. задачу **2.330**). Предположим теперь, что такой пятиугольник существует. Из доказанного следует, что он должен иметь центр симметрии, а значит, четное число вершин. Получили противоречие.

2.334. Нет. ▮ Пусть центр O симметрии не принадлежит оси симметрии l. Тогда прямая l_1, симметричная прямой l относительно точки O, также является осью симметрии фигуры. Пусть точка O принадлежит прямой l. Введем оси координат, приняв за начало координат точку O, а за ось Oy — прямую l (рис. 333). Тогда если точка $(x; y)$ принадлежит фигуре, то точка $(-x; y)$ также ей принадлежит (симметрия относительно оси Oy). Тогда и точка $(x; -y)$ также принадлежит фигуре (симметрия относительно точки O). Следовательно, фигура симметрична относительно оси Ox.

2.335. Если ось симметрии является диагональю, то она — биссектриса двух противоположных углов четырехугольника. Тогда на ней пересекаются две другие биссектрисы, т. е. четырехугольник описанный. Если ось не является диагональю, то она — серединный перпендикуляр к двум сторонам. Тогда на ней пересекаются два других серединных перпендикуляра, т. е. четырехугольник вписанный.

2.336. Если точки A и B симметричны относительно прямой l, то задача имеет бесконечное число решений. Если прямая AB перпендикулярна прямой l, а точки A и B удалены от l на разные расстояния, то решений нет. Во всех остальных

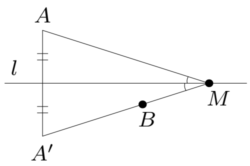


Рис. 334

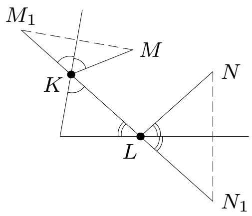


Рис. 335

случаях (рис. 334) искомая точка M является точкой пересечения данной прямой l с прямой, проходящей через одну из данных точек, и точку, симметричную другой относительно прямой l.

2.337. *Указание.* Рассмотрите образ одной из данных точек при симметрии относительно прямой l.

2.338. Пусть луч отразился от одной стороны угла в точке K, а затем от другой — в точке L (рис. 335). Отразим точку M симметрично относительно первой стороны угла, а точку N — относительно второй, получив точки M_1 и N_1 соответственно. Тогда точки M_1, K, L и N_1 лежат на одной прямой. Отсюда вытекает способ построения точек K и L.

2.339. $50°$.

2.340. Пусть M_1 — точка, симметричная точке M относительно одной из сторон угла, N_1 — точка, симметричная точке N относительно другой стороны, K и L — точки на соответствующих сторонах угла (рис. 335). Тогда $MK + KL + NL = M_1K + KL + N_1L \geqslant M_1N_1$ (неравенство треугольника). Следовательно, минимум этой суммы достигается для точек K и L, являющихся точками пересечения прямой M_1N_1 со сторонами данного угла.

2.341. *Указание.* Предположим, что нужный треугольник ABC построен. Пусть N и M — данные середины его сторон AC и BC, а его биссектриса AK лежит на данной прямой l. Тогда точка N_1, симметричная точке N относительно прямой l, лежит на прямой AB, а прямая AB параллельна средней линии MN.

2.342. *Указание.* Примените симметрию относительно серединного перпендикуляра к стороне BC.

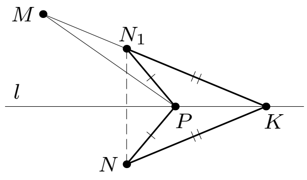


Рис. 336

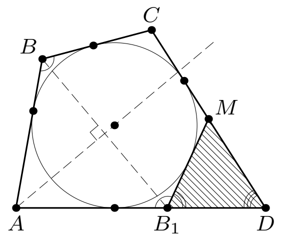


Рис. 337

2.343. Пусть N_1 — точка, симметричная точке N относительно прямой l. Предположим, что прямая MN_1 пересекает прямую l в точке K (рис. 336). Докажем, что точка K — искомая. Пусть P — произвольная точка прямой l, отличная от K. Тогда $MP - NP = MP - N_1P < MN_1 = MK - N_1K = MK - NK$. Задача не имеет решений, если прямая MN_1 параллельна прямой l.

2.344. *Указание.* При симметрии относительно прямой AC точка B перейдет в точку B_1 луча AD. Треугольник CB_1D можно построить по трем сторонам.

2.345. Предположим, что $AD > AB$ (рис. 337). При симметрии относительно биссектрисы угла BAD точка B перейдет в точку B_1 на стороне AD, а образ прямой CB пересечет прямую CD в точке M. Треугольник B_1DM можно построить по стороне и двум прилежащим к ней углам. Его вневписанная окружность — это окружность, вписанная в четырехугольник $ABCD$. Если $AB \neq AD$, то задача имеет единственное решение, если $AB = AD$ и $\angle B = \angle D$, то решений бесконечно много, если же $AB = AD$ и $\angle B \neq \angle D$, то решений нет.

2.346. *Указание.* Пусть A — вершина искомого треугольника ABC, лежащая на данной прямой. Тогда образы точки A при симметрии относительно двух других данных прямых лежат на прямой BC.

2.347. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $\angle B - \angle A = \gamma$ (рис. 338). При симметрии относительно высоты, опущенной из вершины C, точка B переходит в точку B_1 на стороне AB (предполагаем, что $b > a$). Треугольник AB_1C можно построить по сторонам: $AC = b$, $B_1C = a$ и $\angle ACB_1 = \gamma$.

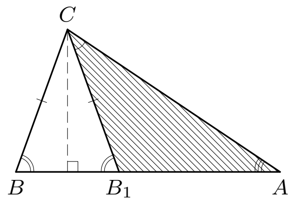


Рис. 338

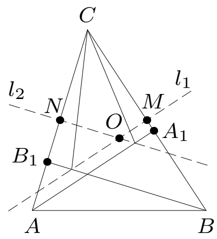


Рис. 339

Если $(b - a) \cdot \gamma > 0$, то задача имеет единственное решение. Если $a - b = 0$ и $\gamma = 0$, то решений бесконечно много. Иначе — решений нет.

2.348. *Указание.* Примените симметрию относительно биссектрисы третьего угла треугольника.

2.349. *Указание.* Примените симметрию относительно биссектрисы данного угла.

2.350. *Указание.* Точка M, симметричная вершине B относительно биссектрисы AB_1 внешнего угла A треугольника ABC, лежит на прямой AC.

2.351. Предположим, что нужный треугольник ABC построен (рис. 339). Пусть O — центр его описанной окружности, AA_1 и BB_1 — его высоты, лежащие на данных прямых, M и N — середины сторон BC и AC (проекции точки O на стороны BC и AC). При симметрии относительно прямой OM прямая BB_1 переходит в прямую, проходящую через вершину C; прямая AA_1 при симметрии относительно прямой ON переходит в прямую, также проходящую через точку C.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Через данный центр O описанной окружности проведем прямые l_1 и l_2, соответственно параллельные данным прямым. Отобразим первую из данных прямых симметрично относительно прямой, проходящей через точку O параллельно прямой l_2, а вторую — относительно прямой, проходящей через точку O параллельно l_1. Отображенные прямые пересекаются в вершине искомого треугольника.

2.352. Пусть вершины A_1, B_1 и C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ принадлежат соответственно сторонам BC, AC и AB

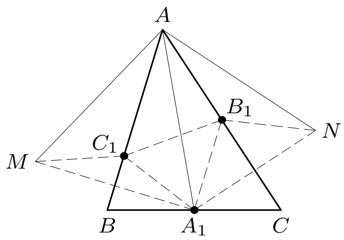


Рис. 340

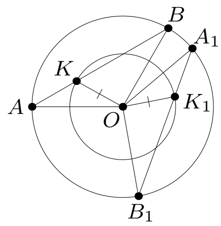


Рис. 341

треугольника ABC (рис. 340). Рассмотрим точки M и N, симметричные точке A_1 относительно прямых AB и AC. Тогда периметр треугольника $A_1B_1C_1$ равен $A_1C_1 + C_1B_1 + B_1A_1 = MC_1 + C_1B_1 + B_1N \geqslant MN$, причем равенство достигается только в случае, если прямая MN проходит через точки B_1 и C_1. Поскольку $AM = AA_1 = AN$, то треугольник MAN равнобедренный и $\angle MAN = 2\angle BAA_1 + 2\angle A_1AC = 2\angle BAC$. Следовательно,

$$MN = 2AM \sin \angle BAC = 2AA_1 \sin \angle BAC \geqslant 2h \sin \angle BAC,$$

где h — высота треугольника ABC, проведенная из вершины A. Равенство достигается только в случае, когда точка A_1 — основание высоты.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Основание A_1 высоты, проведенной из вершины A треугольника ABC, отобразим симметрично относительно прямых AB и AC. Через полученные точки проведем прямую. Точки ее пересечения со сторонами AB и AC дадут остальные вершины искомого треугольника.

Из предыдущих рассуждений следует, что существует только один такой треугольник. Поэтому, начав рассуждения с рассмотрения вершины B (или C), придем к тому же треугольнику. Следовательно, вершины искомого треугольника — основания высот треугольника ABC.

2.354. Пусть O — центр данной окружности, K — данная точка (рис. 341). Проведем какие-нибудь два радиуса OA_1 и OB_1 так, чтобы угол A_1OB_1 имел заданную величину α. Построим на хорде A_1B_1 точку K_1 такую, что $OK_1 = OK$. Повернем

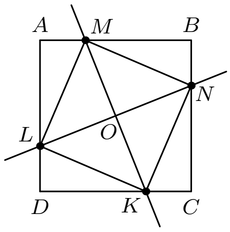


Рис. 342

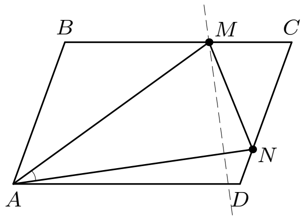


Рис. 343

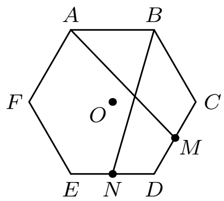


Рис. 344

хорду A_1B_1 на угол KOK_1 вокруг точки O так, чтобы точка K_1 совпала с K.

2.356. Пусть данные перпендикулярные прямые, проходящие через центр O квадрата $ABCD$ (рис. 342), пересекают стороны AB, BC, CD и DA соответственно в точках M, N, K и L (в обоих случаях точки перечислены по часовой стрелке). При повороте вокруг точки O на угол $90°$ по часовой стрелке прямая AB переходит в прямую BC, а прямая MK — в прямую NL. Следовательно, точка M пересечения прямых AB и KM переходит в точку N пересечения прямых BC и LN. Аналогично для остальных вершин четырехугольника $MNKL$. Таким образом, при повороте относительно точки O на $90°$ четырехугольника $MNKL$ переходит в себя. Следовательно, это квадрат.

2.358. а) $M_1(-y;x)$; б) $M_2(y;-x)$.

2.359. Предположим, что нужные точки M и N построены (рис. 343). Пусть $AM = AN$, $\angle MAN = \alpha$. При повороте на угол α относительно точки A, переводящем точку N в точку M, прямая CD переходит в прямую, пересекающую отрезок BC в точке M.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Строим образ прямой CD при повороте относительно точки A на данный угол α. Точка пересечения построенной прямой с отрезком BC (если она существует) есть искомая точка M.

2.360. $60°$. ▮ При повороте на $60°$ относительно центра O правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 344), переводящем вершину A в вершину B, вершина C переходит в вершину D, а вершина D — в вершину E. Поэтому середина M отрезка

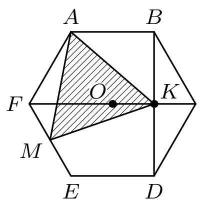


Рис. 345

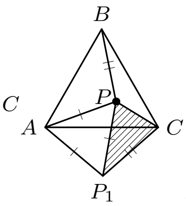


Рис. 346

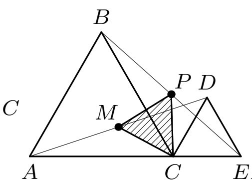


Рис. 347

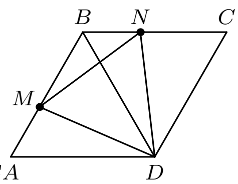


Рис. 348

CD переходит в середину N отрезка ED, а прямая AM — в прямую BN. Следовательно, искомый угол равен 60°.

2.361. Заметим, что точка K — середина отрезка OC, где O — центр данного правильного шестиугольника (рис. 345). При повороте на 60° относительно точки A, переводящем точку O в точку B, вершина F переходит в точку O, а вершина E — в точку C. Поэтому середина M отрезка FE переходит в середину K отрезка OC. Следовательно, треугольник AMK равносторонний.

2.362. *Указание.* Примените поворот на 60° относительно данной точки.

2.363. *Указание.* Примените поворот на 90° относительно точки на одной из данных прямых.

2.364. *Указание.* Примените поворот на 90° относительно данной точки.

2.365. *Указание.* Пусть P_1 — образ точки P при повороте на угол 60° относительно вершины A данного треугольника (рис. 346). Тогда $PP_1 = AP$, $CP_1 = BP$.

2.366. *Указание.* Докажите, что центр квадрата совпадает с центром параллелограмма, и примените поворот на 90° относительно этого центра.

2.367. Рассмотрим поворот на 60° относительно точки C, переводящий точку E в D (рис. 347). При этом повороте точка B перейдет в точку A. Следовательно, отрезок BE переходит в отрезок DA, а середина P отрезка BE — в середину M отрезка AD. Поэтому треугольник CPM равносторонний.

2.368. $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$. ▮ При повороте на 60° по часовой стрелке вокруг точки D (рис. 348) вершина B переходит в вершину C, вершина A — в вершину B, луч BA — в луч CB, а так как

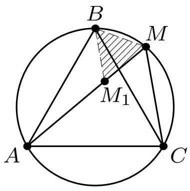


Рис. 349

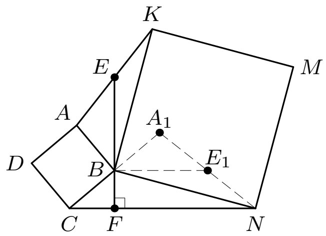


Рис. 350

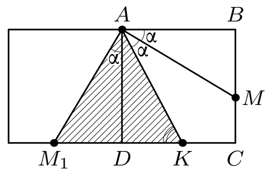


Рис. 351

$CN = BC - BN = AB - AM = BM$, то точка M переходит в точку N. Следовательно, треугольник MDN — равносторонний.

2.369. Пусть M_1 — образ точки M при повороте на 60° относительно вершины B, переводящем C в A (рис. 349). Тогда $\angle AM_1B+\angle BM_1M = \angle CMB+\angle BM_1M = 120^\circ+60^\circ = 180^\circ$. Поэтому точка M_1 лежит на отрезке AM. Следовательно, $AM = AM_1 + M_1M = BM + CM$.

2.370. Рассмотрим поворот на 90° относительно точки B, переводящий вершину K в вершину N (рис. 350). При этом повороте вершина C перейдет в вершину A, а точки A и E — в некоторые точки A_1 и E_1. Поскольку E_1 и B середины отрезков A_1N и A_1C, то E_1B — средняя линия треугольника A_1NC. Поэтому $BE_1 \parallel NC$, а так как $\angle EBE_1 = 90^\circ$, то $BE \perp NC$. Следовательно, точки E, B и F лежат на одной прямой.

2.371. Повернем квадрат $ABCD$ относительно вершины A на 90° так, чтобы вершина B перешла в вершину D (рис. 351). Тогда точка M перейдет в точку M_1, лежащую на продолжении стороны CD за точку D, и $M_1D = BM$. Обозначим $\angle BAM = \angle MAK = \alpha$. Тогда $\angle AM_1D = \angle AMB = 90^\circ - \alpha$, а $\angle AKD = \angle BAK = 2\alpha$. Поэтому $\angle M_1AK = \alpha + (90^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha$, т. е. треугольник AKM_1 — равнобедренный. Следовательно, $AK = KM_1 = KD + DM_1 = KD + BM$.

2.372. 90°, 60°, 30°. ▮ Повернем треугольник BMP на 60° относительно точки C так, чтобы точка B перешла в A (рис. 352). Тогда точка P перейдет в точку P_1 отрезка AC, точка M — в точку M_1, лежащую вне треугольника ABC, точка D — в точку D_1, центр треугольника AM_1P_1.

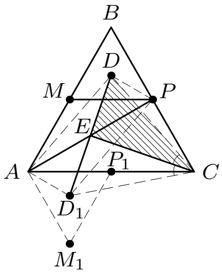


Рис. 352

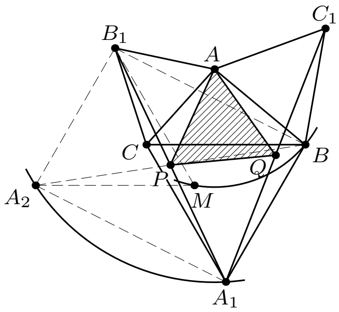


Рис. 353

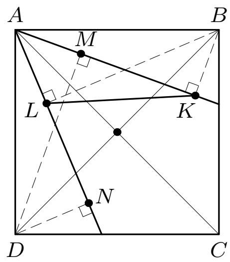


Рис. 354

Четырехугольник DPD_1A — параллелограмм, DD_1 — его диагональ. Поэтому D_1D проходит через точку E и $D_1E = DE$. Поскольку CE — медиана равнобедренного треугольника DCD_1 ($CD = CD_1$), то $\angle CED = 90°$, а так как $\angle DCD_1 = 60°$, то $\angle DCE = 30°$.

2.373. При повороте на $60°$ относительно точки A (рис. 353), переводящем точку C в точку B_1, равносторонний треугольник A_1BC переходит в равносторонний треугольник A_2MB_1. Поэтому $B_1A_2 = MA_2 = BA_1$ и $B_1A_2 \parallel BA_1$. Следовательно, $BA_1A_2B_1$ — параллелограмм. Поэтому середина P его диагонали B_1A_1 является серединой диагонали BA_2. При рассматриваемом повороте отрезок C_1A_1 переходит в отрезок BA_2. Поэтому середина Q отрезка C_1A_1 переходит в середину P отрезка BA_2. Следовательно, треугольник APQ равносторонний.

2.374. При повороте на $90°$ вокруг центра O данного квадрата, переводящем вершину B в вершину A (рис. 354), вершина A переходит в вершину D, луч BK — в луч AK ($\angle ABK = \angle DAM$), а луч AK — в луч DM. Поэтому точка K пересечения лучей BK и AK перейдет в точку M пересечения лучей AM и DM. Аналогично докажем, что при этом повороте точка L перейдет в точку N. Следовательно, отрезок KL переходит в отрезок MN. Поэтому $KL = MN$ и $KL \perp MN$.

2.375. Предположим, что задача решена (рис. 355). Пусть прямая l_1, проходящая через точку A, пересекает данную окружность в точках M и N, а прямая l_2, проходящая через данную точку B, — в точках P и Q. Пусть также при

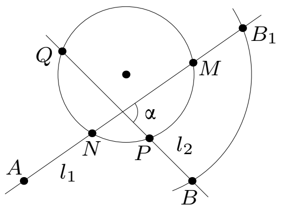


Рис. 355

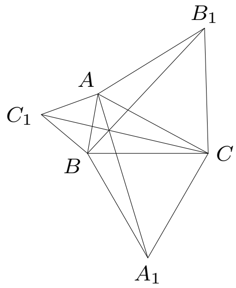


Рис. 356

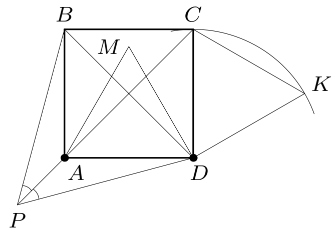


Рис. 357

повороте на угол α относительно центра данной окружности, переводящем точку Q в точку N, точка P переходит в точку M. Тогда прямая l_2 переходит в прямую l_1, а точка B — в точку B_1, лежащую на прямой l_1.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Строим образ B_1 точки B при повороте относительно центра окружности на данный угол α. Тогда прямая AB_1 — одна из искомых прямых. Проведя через точку B прямую под углом α к построенной, получим вторую искомую прямую.

2.376. При повороте на угол 60° относительно вершины A (рис. 356), переводящем точку C_1 в B, точка C переходит в точку B_1. Следовательно, отрезок C_1C переходит в отрезок BB_1. Поэтому $CC_1 = BB_1$. Аналогично докажем, что $AA_1 = BB_1$.

2.377. Докажем, что при повороте на угол 60° относительно вершины D, переводящем точку K в точку C, образ вершины B попадет на прямую AC (рис. 357). Тогда образы точек K, M и B при этом повороте будут лежать на одной прямой AC. Возьмем на продолжении диагонали AC за точку A такую точку P, для которой $\angle PDB = 60^\circ$. Тогда $\angle APD = \angle CAD - \angle ADP = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$, а так как точка P равноудалена от точек B и D, PC — биссектриса угла BPD. Поэтому $\angle BPD = 60^\circ$, значит, треугольник BDP равносторонний. Следовательно, точка P — образ точки B при этом повороте.

2.378. 135°. ▮ Будем считать, что $AP = 1$, $BP = 2$, $CP = 3$ (рис. 358). Пусть P_1 — образ точки P при повороте на 90° против часовой стрелки вокруг вершины B. Тогда PBP_1 — равнобедренный прямоугольный треугольник. Поэтому $\angle BP_1P = 45^\circ$,

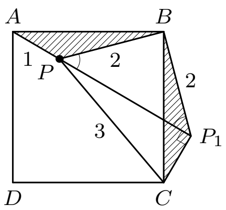


Рис. 358

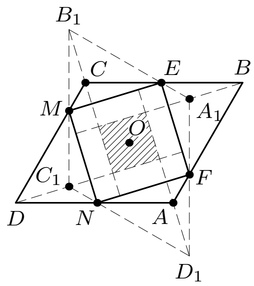


Рис. 359

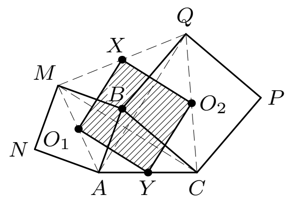


Рис. 360

$P_1P = 2\sqrt{2}$. Следовательно, $PP_1^2 + P_1C^2 = 8 + 1 = 9 = 3^2 = PC^2$. Значит, треугольник PP_1C прямоугольный, $\angle PP_1C = 90^\circ$. Следовательно, $\angle APB = \angle CP_1B = \angle CP_1P + \angle BP_1P = 90^\circ + 45^\circ =$ $= 135^\circ$.

2.379. Пусть вершины F, E, M и N квадрата $FEMN$ лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$ (рис. 359). Достаточно доказать, что при повороте на 90° вокруг центра O квадрата $FEMN$ указанные перпендикуляры переходят друг в друга. Пусть параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ — образ параллелограмма $ABCD$ при этом повороте (точка A_1 — образ точки A и т. д.). Поскольку стороны параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ перпендикулярны сторонам параллелограмма $ABCD, FA_1 \perp BC$ и $A_1E \perp AB$. Поэтому A_1 — точка пересечения высот треугольника BEF и, следовательно, $BA_1 \perp EF$. Значит, перпендикуляр, опущенный из вершины A на сторону NF квадрата $FEMN$, переходит при рассматриваемом повороте в перпендикуляр, опущенный из вершины B на сторону FE. Отсюда следует утверждение задачи.

2.380. Пусть O_1 и O_2 — центры квадратов $ABMN$ и $BCPQ$, X и Y — середины отрезков MQ и AC соответственно (рис. 360). При повороте на угол 90° относительно точки B, переводящем точку M в точку A, точка C переходит в точку Q, а отрезок MC — в отрезок AQ. Следовательно, $MC = AQ$ и $MC \perp AQ$. Точки O_1, X, O_2 и Y — середины сторон четырехугольника $AMQC$. Поэтому O_1XO_2Y — параллелограмм, $XO_2 = O_1Y = \frac{1}{2}MC$, $O_1X = YO_2 = \frac{1}{2}AQ$, $XO_2 \parallel O_1Y \parallel MC$, $O_1X \parallel YO_2 \parallel AQ$. Следовательно, O_1XO_2Y — квадрат.

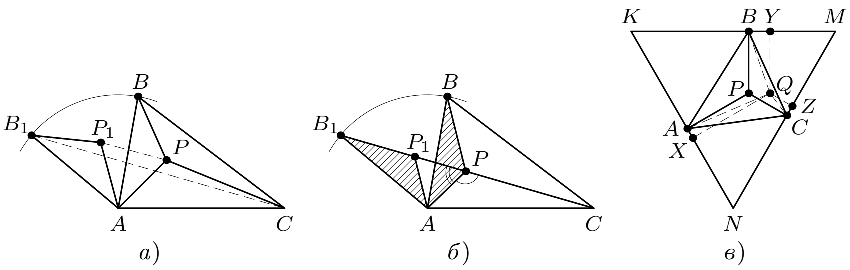


Рис. 361

2.381. *Первый способ.* Пусть P — некоторая точка внутри остроугольного треугольника ABC (рис. 361, *а*). При повороте на 60° относительно вершины A треугольник ABP переходит в равный ему треугольник AP_1B_1, а треугольник AP_1P равносторонний. Поэтому

$$PB + PA + PC = B_1P_1 + P_1P + PC \geqslant B_1C,$$

причем равенство достигается только в случае, когда точки P_1 и P лежат на отрезке B_1C. Тогда $\angle APC = 120^\circ$, т. е. сторона AC видна из точки P под углом 120° (рис. 361, *б*). Аналогично докажем, что $\angle APB = 120^\circ$. Следовательно, $\angle BPC = 120^\circ$. Таким образом, каждая сторона треугольника видна из искомой точки P под углом 120°. Поэтому для построения точки P достаточно построить на двух сторонах треугольника как на хордах дуги, вмещающие углы 120°.

Второй способ. Пусть P — точка, внутри треугольника ABC, из которой все стороны видны под углом 120° (рис. 361, *в*). Через вершины A, B и C проведем прямые, перпендикулярные отрезкам PA, PB и PC. Пусть M, N и K — точки пересечения этих прямых. Тогда треугольник MNK равносторонний. Если Q — произвольная точка внутри треугольника ABC, а X, Y и Z — ее проекции на стороны KN, KM и MN треугольника MNK, проходящие соответственно через точки A, B и C, то $PA+PB+PC = QX+QY+QZ$ (каждая из этих сумм равна высоте треугольника MNK). Поскольку $QX \leqslant QA$, $QY \leqslant QB$ и $QZ \leqslant QC$, то $PA + PB + PC \leqslant QA + QB + QC$.

2.384. *Указание.* Пусть MN — отрезок данной длины, параллельный данной прямой l. Постройте образ луча BC при

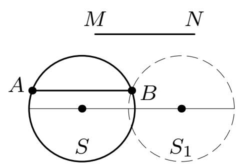


Рис. 362

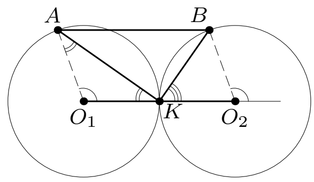


Рис. 363

параллельном переносе, переводящем точку M в точку N (или N в M).

2.385. *Первый способ.* Предположим, что искомая хорда AB построена (рис. 362). Пусть MN — данный отрезок. Тогда при параллельном переносе, переводящем точку M в точку N (или N в M), точка A перейдет в точку B, а данная окружность S перейдет в окружность S_1, проходящую через точку B.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Строим образ S_1 данной окружности при параллельном переносе, переводящем точку M, в точку N. Точки пересечения окружностей S и S_1 — концы искомых хорд.

Если окружности S_1 и S не пересекаются, то задача не имеет решений.

Второй способ. Поскольку геометрическое место середины всех хорд данной окружности, имеющих заданную длину, есть окружность, концентрическая данной, то задача сводится к построению касательной к этой окружности, параллельной данной прямой.

2.386. *Указание.* Пусть MN — данный отрезок. Рассмотрите образ одной из окружностей при параллельном переносе, переводящем точку M в точку N.

2.387. *Указание.* Рассмотрите образы отрезков AM и DM при параллельном переносе, переводящем точку A в точку B.

2.388. Пусть O_1 и O_2 — центры первой и второй окружностей (рис. 363). Обозначим $\angle AO_1K = \alpha$. Из равнобедренного треугольника AO_1K находим, что $\angle AKO_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Поэтому

$$\angle BKO_2 = 180^\circ - 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}, \qquad \angle KO_2B = 180^\circ - \alpha.$$

Следовательно, прямые O_1A и O_2B параллельны. При парал-

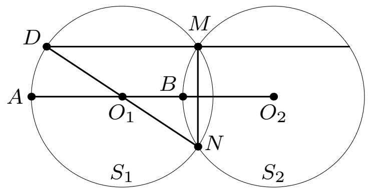


Рис. 364

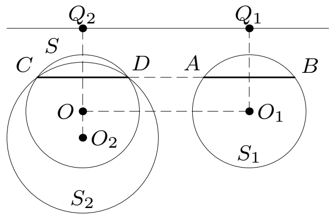


Рис. 365

лельном переносе, переводящем точку O_1 в точку O_2, первая окружность перейдет во вторую, а точка A перейдет в точку B. Следовательно, $AB = O_1O_2 = 2R$.

2.389. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей S_1 и S_2 (рис. 364), точка A лежит на окружности S_1, B — на окружности S_2, B — между A и O_2. Через точку M проведем прямую, параллельную O_1O_2. Пусть D — ее точка пересечения с окружностью S_1. При параллельном переносе, переводящем точку O_1 в точку O_2, окружность S_1 перейдет в окружность S_2, точка D — в точку M, точка A — в точку B. Поэтому отрезок DM равен и параллелен отрезку AB, а $\angle DMN = 90°$. Тогда DN — диаметр окружности. Следовательно, $4R^2 = DN^2 = DM^2 + MN^2 = AB^2 + MN^2$.

2.391. Предположим, что нужная прямая проведена (рис. 365). Пусть $AB = CD$ — хорды данных окружностей S_1 и S_2, параллельные данной прямой l, Q_1 и Q_2 — проекции центров O_1 и O_2 этих окружностей на прямую l. Тогда при параллельном переносе, переводящем точку Q_1 в точку Q_2, отрезок AB перейдет в отрезок CD, а окружность S_1 — в окружность S, имеющую общую хорду CD с окружностью S_2.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Опустим перпендикуляры из центров данных окружностей S_1 и S_2 на данную прямую l. Пусть Q_1 и Q_2 — основания этих перпендикуляров. Если при параллельном переносе, переводящем точку Q_1 в точку Q_2, образ S окружности S_1 пересекает окружность S_2 в двух точках C и D, то CD — искомая прямая.

2.392. Рассмотрим случай, когда в четырехугольнике нет параллельных сторон. Пусть пересекаются лучи BA и CD

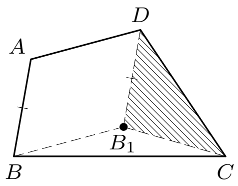


Рис. 366

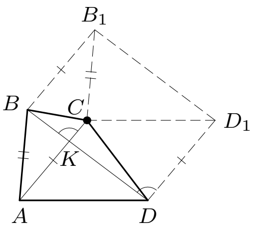


Рис. 367

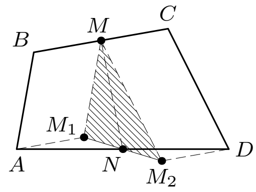


Рис. 368

(рис. 366). Предположим, что нужный четырехугольник $ABCD$ построен. Пусть B_1 — образ вершины B при параллельном переносе, переводящем точку A в точку D. Тогда $DB_1 = AB$. Поэтому в треугольнике DB_1C известны две стороны ($DB_1 = a$, $DC = b$) и угол между ними ($\angle B_1DC = \angle ADC - \angle ADB_1 = \angle ADC - (180^\circ - \angle DAB)$).

Отсюда вытекает следующий способ построения. Строим треугольник DB_1C. Затем в полуплоскости, содержащей точку B_1, откладываем от лучей DC и CD углы CDX и DCY, соответственно равные данным углам D и C. Затем через точку B_1 проводим прямую, параллельную прямой DX. Эта прямая пересекает прямую CY в искомой вершине B, а прямая, проходящая через точку B параллельно DB_1, пересекает прямую DX в искомой вершине A.

2.394. Рассмотрим случай, когда даны две противоположные стороны (рис. 367). Предположим, что нужный четырехугольник $ABCD$ построен. Пусть $AB = a$ и $CD = b$ — данные стороны, $AC = d_1$, $BD = d_2$ — данные диагонали, K — точка пресечения диагоналей, $\angle BKC = \alpha$ — данный угол. Достроим треугольники DAC и BAC до параллелограммов ADD_1C и ABB_1C. Тогда BB_1D_1D — также параллелограмм со сторонами $B_1D_1 = BD = d_2$, $BB_1 = DD_1 = AC = d_1$ и углом α между сторонами DD_1 и DB. При этом точка C удалена от вершин D и B_1 на расстояния b и a соответственно.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Строим параллелограмм BB_1D_1D по двум соседним сторонам $DD_1 = d_1$, $DB = d_2$ и углу $\angle BDD_1 = \alpha$. Пересечение окружностей с центрами в точках B_1 и D с радиусами a и b соответственно дает вершину C. Через точки B и D проведем прямые, параллельные CB_1 и CD_1 соответственно. Пересечение этих прямых дает искомую вершину A.

2.395. Предположим, что четырехугольник $ABCD$ построен (рис. 368). Пусть M и N — середины противоположных сторон BC и AD, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $MN = m$ — данные отрезки. Достроим треугольники ABM и DCM до параллелограммов $ABMM_1$ и $DCMM_2$. Тогда $MM_1 = AB = a$, $MM_2 = CD = c$. Из равенства треугольников AM_1N и DM_2N следует, что точки M_1, N и M_2 лежат на одной прямой и MN — медиана треугольника M_1MM_2.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Строим треугольник M_1MM_2 по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей. Пусть N — середина M_1M_2. На основаниях NM_1 и NM_2 строим треугольники M_1NA и M_2ND с боковыми сторонами, равными $\frac{b}{2}$ и $\frac{d}{2}$, так, что точки A и D лежат по разные стороны от прямой M_1M_2. Через точки A, M и D проводим прямые, параллельные MM_1, AM_1 и MM_2 соответственно. Первая и третья из этих прямых пересекают вторую в искомых вершинах B и C.

2.396. Пусть $O(a;b)$ и $Q(c;d)$ — центры симметрий, $M(x;y)$ — произвольная точка плоскости. При симметрии относительно точки O точка M переходит в точку $N(a-x;b-y)$, а при симметрии относительно точки Q точка N переходит в точку $L(c-(a-x);d-(b-y))$. Таким образом, при композиции этих симметрий произвольная точка $M(x;y)$ перешла в точку $L(x-a+c;y-b+d)$. Следовательно, это параллельный перенос. Заметим, что результат не зависит от порядка применения симметрий.

2.397. Пусть в выбранной системе координат данные параллельные оси симметрии имеют уравнения $x = a$ и $x = b$. Тогда при симметрии относительно первой прямой точка $M(x;y)$ переходит в точку $N(2a-x;y)$, а при симметрии относительно второй прямой точка N переходит в точку $L(2b-(2a-x);y)$. Таким образом, при композиции этих симметрий произвольная точка $M(x;y)$ перешла в точку $L(x-2a+2b;y)$. Следовательно, это параллельный перенос в направлении, перпендикулярном осям симметрий, на расстояние, равное $2|a-b|$. Заметим, что результат не зависит порядка применения симметрий.

2.398. Пусть диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ равны соответственно a и b, а угол между ними равен α (рис. 369). При параллельном переносе, переводящем точку B в точку A, диагональ BD переходит в отрезок AM; при параллельном переносе, переводящем точку B в точку C, диагональ BD переходит в отрезок CK. Тогда четырехугольник $ACKM$ — параллелограмм со сторонами a и b и углом α между ними. Если N — точка пересечения диагоналей AK и CM этого параллелограмма, то

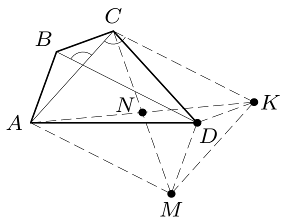


Рис. 369

$$AB+BC+CD+AD=DM+DK+DC+DA=$$
$$=(DM+DC)+(DK+DA)\geqslant CM+AK=NC+NM+NA+NK.$$

Следовательно, вершина D искомого четырехугольника $ABCD$ минимального периметра должна совпасть с точкой N. Параллелограмм $ACKM$ можно построить по двум сторонам и углу между ними. Тогда A и C — вершины искомого четырехугольника, вершина D есть точка пересечения диагоналей этого параллелограмма, а четвертая вершина B — образ точки D при параллельном переносе, переводящем точку K в точку C.

§ 2.7

2.401. $\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$. ▮ Имеем:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{CB}.$$

2.402. $D(9;0)$, $\overrightarrow{AC}(2;3)$, $\overrightarrow{BD}(14;-1)$.

2.403. $\overrightarrow{AB}(3;3)$, $\overrightarrow{DC}(3;3)$, $\overrightarrow{AD}(5;-5)$, $\overrightarrow{BC}(5;-5)$, $\overrightarrow{AC}(8;-2)$, $\overrightarrow{BD}(2;-8)$.

2.404. *Указание.* Найдите координаты и абсолютные величины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$.

2.405. $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$.

2.406⁰. *Указание.* Сложите почленно равенства

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}.$$

2.407. $\frac{5}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}$. *Указание.*

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}, \qquad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}.$$

2.408. $\overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{FD} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$.

2.409. *Указание.*

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),\ \overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}),\ \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}).$$

2.410. *Указание.* Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC. Тогда

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

2.411. *Указание.* $\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_3M_4} + \overrightarrow{M_5M_6} = \vec{0}$.

2.412. *Указание.* $\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AA_1}$.

2.413⁰. *Указание.* $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1M_1}$, $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1M_1}$.

2.414⁰. *Указание.* Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC. Тогда

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

2.415. Пусть K — точка пересечения медиан треугольника ABC. Тогда $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$, поэтому точки K и M совпадают.

2.416. $M(1;2)$. *Указание.* Пусть O — начало координат, M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

2.417. *Указание.* $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$.

2.418⁰. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC, P_1, Q_1, R_1 — середины сторон QR, PR и RQ

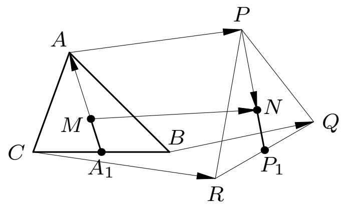


Рис. 370

треугольника PQR (рис. 370). Сложим почленно следующие векторные равенства:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PN}, \qquad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QN},$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CR} + \overrightarrow{RN}.$$

Получим:

$$3\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR})+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{QN}+\overrightarrow{RN}) =$$
$$= \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}-\frac{2}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1})+\frac{2}{3}(\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{QQ_1}+\overrightarrow{RR_1}) =$$
$$= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} - \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR}.$$

Следовательно, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR})$.

2.419. *Указание.* $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CC_1}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{DD_1})$.

2.420. *Указание.* Если P — середина отрезка AB, то

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

2.421. *Указание.* Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ и вычислите скалярное произведение $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

2.422. *Указание.* Пусть четырехугольник $ABCD$ — ромб. Обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$.

2.423. $D(4; 4)$. *Указание.* Обозначьте через t абсциссу точки D, найдите координаты векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ и решите уравнение $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ относительно t.

2.424. *Указание.* Воспользуйтесь равенством

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

2.425. *Указание.* Обозначьте $AK : KB = AN : ND = k$ и выразите векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{NM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

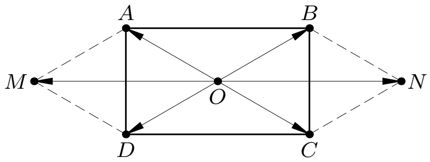


Рис. 371

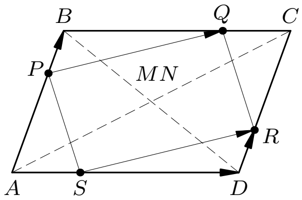


Рис. 372

2.426. *Указание.* Выразите векторы $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{MF}$ и $\overrightarrow{GL}$ через векторы $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CF}$ и найдите сумму $\overrightarrow{KN}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{GL}$.

2.427. Пусть M и N такие точки, что $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (рис. 371). Поскольку $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$, то $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{ON}$, т. е. $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ — противоположные векторы. Поэтому точки M, O и N лежат на одной прямой. Поскольку четырехугольники $OAMD$ и $OBNC$ — ромбы, $AD \perp MN$ и $BC \perp MN$, поэтому $AD \parallel BC$. Аналогично докажем, что $AB \parallel CD$. Значит, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, вписанный в окружность, т. е. прямоугольник.

2.428. В точке, из которой каждая из сторон треугольника видна под углом 120° (точка Торричелли, см. задачу **2.381**).

2.429. Пусть точки P, Q, R, S принадлежат соответственно сторонам AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ (рис. 372) и $AP : PB = BQ : QC = CR : RD = DS : SA = k$. Тогда

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{k+1}\overrightarrow{DC} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}.$$

Поэтому $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$. Следовательно, $PQRS$ — параллелограмм. Пусть теперь M и N — точки пересечения диагоналей параллелограммов $ABCD$ и $PQRS$. Тогда

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} + \overrightarrow{DS}) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{CD} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{DA}\right) = \\ &= \frac{k}{4(k+1)}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) = \frac{k}{4(k+1)} \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.\end{aligned}$$

Следовательно, точки M и N совпадают.

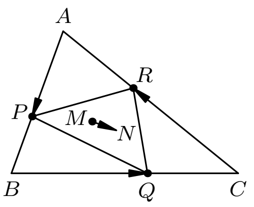


Рис. 373

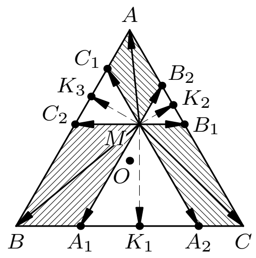


Рис. 374

2.430. Пусть точки P, Q, R принадлежат сторонам треугольника ABC и

$$AP : PB = BQ : QC = CR : RA = k$$

(рис. 373). Если M и N — точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR соответственно, то

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR}) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{CA}\right) =$$
$$= \frac{k}{3(k+1)}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{k}{3(k+1)} \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Следовательно, точки M и N совпадают.

2.431. Проведем через точку M прямые, параллельные сторонам треугольника, и обозначим точки пересечения этих прямых со сторонами треугольника, как показано на рисунке 374. Тогда K_1, K_2, K_3 — середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 соответственно. Поэтому

$$\overrightarrow{MK_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2}), \qquad \overrightarrow{MK_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2}),$$
$$\overrightarrow{MK_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2}).$$

Кроме того,

$$\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MB_2} = \overrightarrow{MA}, \qquad \overrightarrow{MC_2} + \overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MB},$$
$$\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{MC}.$$

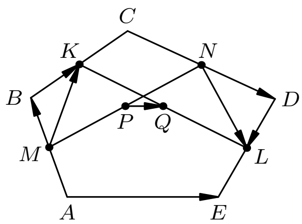


Рис. 375

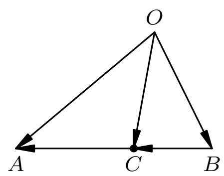


Рис. 376

Тогда

$$\overrightarrow{MK_1}+\overrightarrow{MK_2}+\overrightarrow{MK_3}=$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MB_2}+\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MC_2})=$$
$$=\frac{1}{2}((\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MB_2})+(\overrightarrow{MC_2}+\overrightarrow{MA_1})+(\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MB_1}))=$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\overrightarrow{MO}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$

2.432. Имеем:

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{NL})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DL})=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$$

(рис. 375). Следовательно,

$$PQ=\frac{1}{4}AE \quad \text{и} \quad PQ\parallel AE.$$

2.433. *Достаточность.* Если $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$, то $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=k(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$, или $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{BA}$ (рис. 376). Следовательно, векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}$ коллинеарны. Поэтому точки A, B и C принадлежат одной прямой.

Необходимость. Если точки A, B, C принадлежат одной прямой, то векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}$ коллинеарны. Поэтому найдется число k такое, что $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{BA}$. Тогда

$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=k(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}),\quad \text{или}\quad \overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}.$$

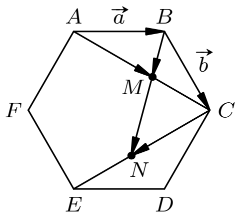


Рис. 377

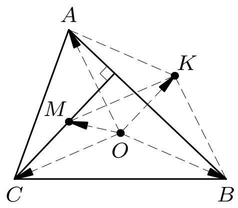


Рис. 378

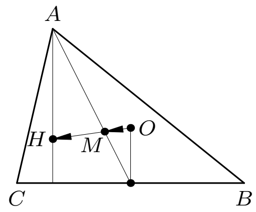


Рис. 379

2.434. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. ▮ Заметим, что $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (рис. 377). Тогда

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC} = \lambda(\vec{a} + \vec{b}),$$
$$\overrightarrow{CN} = \lambda\overrightarrow{CE} = \lambda(\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE}) = \lambda(-2\vec{a} + \vec{b}),$$
$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = (\lambda - 1)\vec{a} + \lambda\vec{b},$$
$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \vec{b} + \lambda(-2\vec{a} + \vec{b}) = -2\lambda\vec{a} + (\lambda + 1)\vec{b}.$$

Если точки B, M, N лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BN}$ коллинеарны. Поэтому $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BN}$, или $(\lambda - 1)\vec{a} + \lambda\vec{b} = -2k\lambda\vec{a} + k(\lambda + 1)\vec{b}$. Поскольку $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda - 1 = -2k\lambda, \\ \lambda = k(\lambda + 1). \end{cases}$$

Отсюда находим, что $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.435. Рассмотрим сумму векторов $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK}$ (рис. 378). Отрезок OK — диагональ ромба $OAKB$. Поэтому OK перпендикулярно AB. Следовательно, $OK \parallel CH$. Тогда если $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}$, то точка M принадлежит высоте, проходящей через вершину C. Таким образом, если $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}$, то точка M принадлежит каждой высоте треугольника ABC. Следовательно, точки M и H совпадают.

2.436. Пусть O, H и M — соответственно центр описанной окружности, ортоцентр и точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 379). Тогда $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (см.

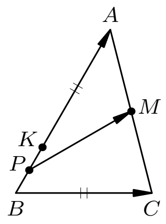


Рис. 380

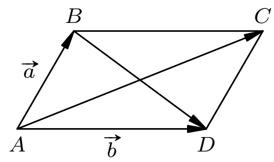


Рис. 381

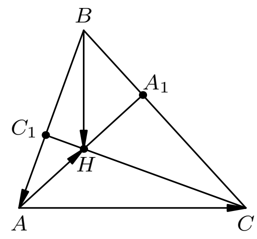


Рис. 382

задачу **2.435**) и $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ (см. задачу $\mathbf{2.414^0}$). Поэтому $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$. Следовательно, точки O, M и H лежат на одной прямой, причем точка M делит отрезок OH в отношении $1:2$, считая от точки O.

2.437. $\frac{\alpha}{2}$. *Указание.* $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{BC})$ (см. задачу $\mathbf{2.413^0}$), а абсолютные величины векторов KA и BC равны между собой (рис. 380).

2.438. $K(5;-3)$. *Указание.* Пусть M — середина AB, $K(x;y)$ — искомая точка на данной прямой. Тогда $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

2.439. *Указание.* Применяя свойства скалярного произведения векторов, докажите, что скалярное произведение данного вектора на вектор $\vec{c}$ равно 0.

2.440. Пусть четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (рис. 381). Обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Тогда

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \qquad \overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a},$$
$$\overrightarrow{AC}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}, \qquad \overrightarrow{BD}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Следовательно, $AC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2AB^2 + 2AD^2$.

2.441. $m = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$. *Указание.* Достройте треугольник до параллелограмма и воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

2.442. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$; $AM = \frac{\sqrt{790}}{5}$.

2.443. *Указание.* Выразите векторы $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{DM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ и найдите скалярное произведение $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{DM}$.

2.444. *Указание.* $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AM}$, угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AL}$ равен углу между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AM}$.

2.445. Имеем:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=$$
$$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=$$
$$=-\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=$$
$$=(-\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD})=$$
$$=\overrightarrow{AC}(-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BD})+\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC})=$$
$$=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0.$$

2.446. Пусть высоты AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H (рис. 382). Докажем, что прямая BH перпендикулярна стороне AC. Тогда третья высота BB_1 также пройдет через точку H. Действительно,

$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH})(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=$$
$$=-AB^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=$$
$$=-AB^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}+0=$$
$$=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=0.$$

Что и требовалось доказать.

2.447. Имеем:

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=$$
$$=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=$$
$$=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{OB}^2=0.$$

Поэтому $AH\perp BC$. Аналогично, $BH\perp AC$ и $CH\perp AB$. Следовательно, H — точка пересечения высот треугольника ABC.

2.448. См. рисунок 383. $\overrightarrow{CD}=\dfrac{AD}{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\dfrac{BD}{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$ (см. пример 1 из §2.7, с. 108), поэтому

$$CD^2=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2\cdot\overrightarrow{CB}^2+\left(\frac{BD}{AB}\right)^2\cdot\overrightarrow{CA}^2+2\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BD}{AB}\cdot\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA},$$

но $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$, значит, $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{CA}^2-2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$, откуда

$$2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=CB^2+CA^2-AB^2.$$

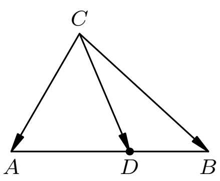


Рис. 383

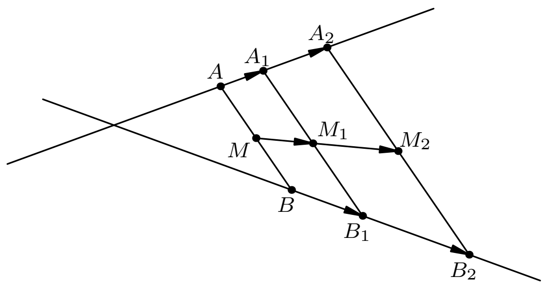


Рис. 384

Тогда

$$CD^2 = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 \cdot CB^2 + \left(\frac{BD}{AB}\right)^2 \cdot CA^2 + \frac{AD}{AB} \cdot \frac{BD}{AB} \cdot (CB^2 + CA^2 - AB^2),$$

или

$$AB^2 \cdot CD^2 = AD^2 \cdot CB^2 + BD^2 \cdot CA^2 + AD \cdot BD \cdot (CB^2 + CA^2 - AB^2) =$$
$$= (AD^2 + AD \cdot BD) \cdot CB^2 + (BD^2 + AD \cdot BD) \cdot CA^2 - AD \cdot BD \cdot AB^2 =$$
$$= AD \cdot (AD + BD) \cdot CB^2 + BD \cdot (BD + AD) \cdot CA^2 - AD \cdot BD \cdot AB^2 =$$
$$= AD \cdot AB \cdot CB^2 + BD \cdot AB \cdot CA^2 - AD \cdot BD \cdot AB^2.$$

Следовательно,

$$AB \cdot CD^2 = AD \cdot CB^2 + BD \cdot CA^2 - AD \cdot BD \cdot AB.$$

2.449. Обозначим $\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{a}$. При повороте на угол $\dfrac{360^\circ}{n}$ вокруг точки O точка A_i переходит в точку A_{i+1} $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, а точка A_n — в точку A_1. Поэтому вектор $\vec{a}$ при таком повороте переходит сам в себя. Следовательно, $\vec{a} = \vec{0}$. Далее,

$$\overrightarrow{XA_1} + \ldots + \overrightarrow{XA_n} = (\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA_2}) + \ldots + (\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA_n}) =$$
$$= n\overrightarrow{XO} + \vec{0} = n\overrightarrow{XO}.$$

2.450. Прямую. ▌ Пусть A и B — точки, в которых находились пешеходы в начале движения (рис. 384). Через некоторое время они оказались в точках A_1 и B_1 соответственно. Если M и M_1 — середины отрезков AB и A_1B_1, то $\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1})$. Аналогично, $\overrightarrow{MM_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{BB_2})$, где A_2 и B_2 — точки,

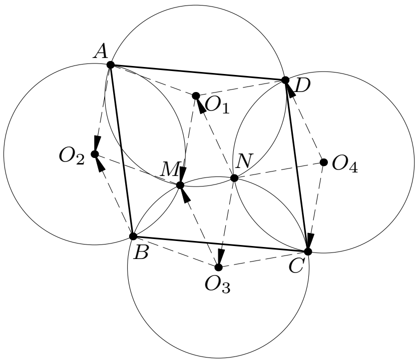


Рис. 385

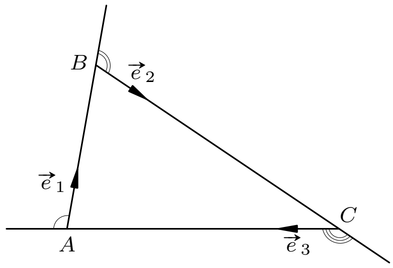


Рис. 386

в которых находились пешеходы еще через некоторое время, а M_2 — середина отрезка A_2B_2. Поскольку скорости пешеходов постоянны, то $\overrightarrow{AA_2} = k\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_2} = k\overrightarrow{BB_1}$. Поэтому

$$\overrightarrow{MM_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{BB_2}) = k \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1}) = k\overrightarrow{MM_1}.$$

Следовательно, точки M_1 и M_2 лежат на прямой, проходящей через точку M.

2.451. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры описанных окружностей треугольников AMN, AMB, BMN, CND соответственно (рис. 385). Поскольку O_4NO_3C, NO_1MO_3, O_1AO_2M — ромбы, то $\overrightarrow{O_4C} = \overrightarrow{NO_3} = \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{AO_2}$. Поскольку O_4DO_1N, NO_1MO_3, O_3MO_2B — ромбы, то $\overrightarrow{O_4D} = \overrightarrow{NO_1} = \overrightarrow{O_3M} = \overrightarrow{BO_2}$. Таким образом, $\overrightarrow{O_4C} = \overrightarrow{AO_2}$, $\overrightarrow{O_4D} = \overrightarrow{BO_2}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{O_4D} - \overrightarrow{O_4C} = \overrightarrow{BO_2} - \overrightarrow{AO_2} = \overrightarrow{BA},$$

т. е. $ABCD$ — параллелограмм.

2.452. а) Отложим на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, сонаправленные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ соответственно (рис. 386). Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Тогда

$$0 \leqslant (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 =$$
$$= \vec{e}_1^{\,2} + \vec{e}_2^{\,2} + \vec{e}_3^{\,2} + 2 \cdot \vec{e}_1\vec{e}_2 + 2 \cdot \vec{e}_1\vec{e}_3 + 2 \cdot \vec{e}_2\vec{e}_3 =$$
$$= 1 + 1 + 1 + 2(\cos(180^\circ - \beta) + \cos(180^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \gamma)) =$$
$$= 3 - 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma).$$

Откуда $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$. Равенство достигается в случае, когда $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$, т. е. когда треугольник ABC равносторонний.

б) *Указание.* Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC с углами α, β, γ. На радиусах OA, OB, OC отложите единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$. Тогда $(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3)^2 \geqslant 0$.

§ 2.8

2.453. 12. **2.454⁰.** $\frac{1}{4}$.

2.460. $\frac{1}{4}$. *Указание.* Докажите, что четырехугольники $AMND$ и $BMNC$ — параллелограммы, и воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

2.462. 14 и 21.

2.463⁰. 5. ▮ Соединим точки B и K (рис. 387). Тогда

$$S_{ABK}=\frac{3}{5}S_{ABC}, \qquad S_{AMK}=\frac{1}{6}S_{ABK}.$$

Поэтому

$$S_{AMK}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}S_{ABC}=\frac{1}{10}S_{ABC}=5.$$

2.464. $\frac{13}{20}$. **2.465.** 9 : 5. **2.466.** $\frac{1}{4}$. **2.468.** 32. **2.469.** $\frac{a^2-b^2}{4}$. **2.470.** $\frac{ab}{2}$. **2.471.** 4.

2.472⁰. Пусть M — точка пересечения медиан AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC (рис. 388). Тогда

$$S_{B_1MC}=\frac{1}{3}S_{B_1BC}=\frac{1}{6}S_{ABC}.$$

Аналогично для остальных пяти треугольников.

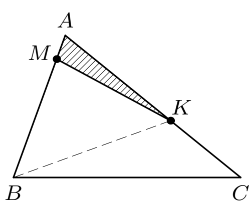


Рис. 387

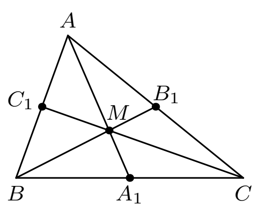


Рис. 388

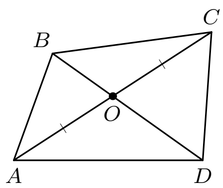


Рис. 389

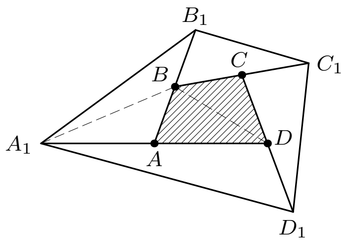


Рис. 390

2.477. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ (рис. 389). Если $AO = OC$, то

$$S_{AOB} = S_{COB} \quad \text{и} \quad S_{AOD} = S_{COD}.$$

Следовательно,

$$S_{ABD} = S_{AOB} + S_{AOD} = S_{COB} + S_{COD} = S_{CBD}.$$

2.478. *Указание.* Пусть M и N — соответственно середины сторон AB и BC данного четырехугольника $ABCD$. Тогда MN — средняя линия треугольника ABC, поэтому $S_{MBN} = \frac{1}{4}S_{ABC}$.

2.479. $\frac{ab}{4}$. *Указание.* Искомый четырехугольник — прямоугольник со сторонами $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$.

2.480⁰. *Указание.* Соедините точки C и M и воспользуйтесь результатом задачи **2.458⁰**.

2.481. $\frac{7}{16}$.

2.482. $5s$. ▮ Заметим, что

$$S_{ABD} + S_{ABC} + S_{BCD} + S_{ACD} = 2s$$

(рис. 390). Отрезок A_1B — медиана треугольника AA_1B_1, а BA — медиана треугольника A_1BD, поэтому

$$S_{AA_1B_1} = 2S_{AA_1B} = 2S_{ABD}.$$

Аналогично,

$$S_{BB_1C_1} = 2S_{ABC}, \qquad S_{CC_1D_1} = 2S_{BCD},$$
$$S_{DD_1A_1} = 2S_{ACD}.$$

Следовательно,

$$S_{A_1B_1C_1D_1} = \\ = S_{ABCD} + S_{AA_1B_1} + S_{BB_1C_1} + S_{CC_1D_1} + S_{DD_1A_1} = \\ = S_{ABCD} + 2S_{ABD} + 2S_{ABC} + 2S_{BCD} + 2S_{ACD} = \\ = s + 4s = 5s.$$

2.483. *Указание.* Пусть точки M и N расположены соответственно на сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$, причем $AM : MB = AN : ND = 1 : 2$ (рис. 391). Тогда прямые CM и CN делят параллелограмм $ABCD$ на три равновеликие части.

2.484. 14. *Указание.* Четырехугольник с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника — ромб (см. задачу **2.478**).

2.485. 48. *Указание.* Четырехугольник с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника — прямоугольник.

2.486. *Указание.* Отрезки, соединяющие точку внутри треугольника с вершинами, разбивают треугольник на три треугольника, сумма площадей которых равна площади данного треугольника.

2.487. *Указание.* Отрезок, соединяющий точку на основании равнобедренного треугольника с вершиной, разбивает треугольник на два треугольника, сумма площадей которых равна площади данного треугольника.

2.488. $\frac{bc}{a+b}$, $\frac{ac}{a+b}$. *Указание.* $S_{ABM} = S_{ACM}$.

2.489⁰. *Указание.* Соедините центр вписанной окружности с вершинами треугольника и сложите площади полученных треугольников.

2.490. *Указание.* Пусть a и b — катеты прямоугольного треугольника, c — гипотенуза, r — радиус вписанной окружности. Тогда $r = \frac{a+b-c}{2}$.

2.491. Пусть S — площадь прямоугольного треугольника, r — радиус его вписанной окружности, a и b — указанные отрезки гипотенузы. Тогда

$$S = (a + b + r)r = ar + br + r^2 = (a + r)(b + r) - ab = 2S - ab,$$

откуда $S = ab$.

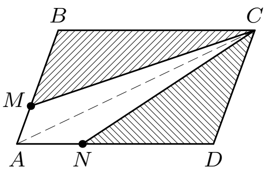


Рис. 391

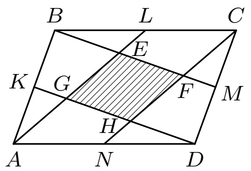


Рис. 392

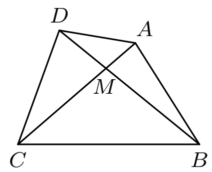


Рис. 393

2.492. $\frac{ab}{a+b}$. *Указание.* Соедините центр окружности с вершиной прямого угла и сложите площади полученных треугольников.

2.493⁰. *Указание.* Соедините центр окружности с вершинами треугольника.

2.494. $\frac{c^2}{8}$. *Указание.* Проведите высоту и медиану из вершины прямого угла данного треугольника.

2.495. $\frac{1}{5}$. *Указание.* Пусть прямая BM пересекает отрезки AL и CN (рис. 392) соответственно в точках E и F, а прямая DK — соответственно в точках G и H. Тогда $EFHG$ — параллелограмм, $BE = EF = GH = DH = 2FM$.

2.496. 120. ▮ Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ (рис. 393). Если $S_{AMD} = 30$, $S_{AMB} = 10$, $S_{CMD} = 20$, то

$$\frac{BM}{MD} = \frac{S_{AMB}}{S_{AMD}} = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad S_{BMC} = \frac{1}{3}S_{CMD} = \frac{20}{3} < 10.$$

Разбирая остальные возможные случаи, убеждаемся, что возможны только два из них: $S_{AMB} = 20$, $S_{AMD} = 10$, $S_{CMD} = 30$ или $S_{AMB} = 30$, $S_{AMD} = 10$, $S_{CMD} = 20$. В каждом из возможных случаев $S_{BMC} = 60$. Следовательно,

$$S_{ABCD} = 10 + 20 + 30 + 60 = 120.$$

2.497. $\frac{3ab}{4}$. *Указание.* Через вершину C проведите прямую, параллельную AB.

2.498. 45°, 90°, 45°. ▮ Поскольку

$$\frac{S_{NMC}}{S_{ABC}} = \frac{CN}{BC} \cdot \frac{CM}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CM}{AC} = \frac{1}{8},$$

то $\frac{CM}{AC} = \frac{1}{4}$. Пусть BK — высота треугольника ABC (рис. 394). Тогда NM — средняя линия треугольника BKC. Поэтому

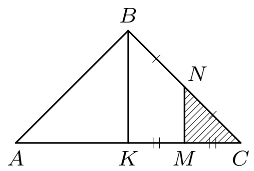


Рис. 394

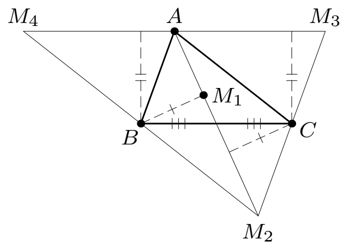


Рис. 395

$KM = MC$ и $AK = KC$, т. е. треугольник ABC — равнобедренный. Следовательно, $\angle C = 45°$, $\angle B = 90°$.

2.499. Может.

2.500. а) Две параллельные прямые.

б) Прямая, содержащая медиану, проведенную к стороне BC, и прямая, проходящая через вершину A параллельно BC.

в) Точка пересечения медиан треугольника ABC и вершины треугольника, для которого стороны треугольника ABC являются средними линиями. ▌ Из равенства площадей треугольников ABM и ACM следует, что точки B и C равноудалены от прямой AM. Поэтому прямая AM параллельна BC или проходит через середину стороны BC (рис. 395). Следовательно, искомые точки — это точка пересечения медиан треугольника ABC и точки пересечения прямых, проходящих через вершины треугольника ABC параллельно противолежащим сторонам (точки M_1, M_2, M_3 и M_4 на рисунке 395).

2.501. *Указание.* Проведите высоты треугольников KNL, ABK, CML и примените теорему о средней линии трапеции (рис. 396).

2.502. *Указание.* Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

2.503. 20, 10, 5, 15.

2.504. Пусть M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ (рис. 397), $S_{AMND} = S_{BMNC}$. Поскольку треугольники AMN и BMN равновелики, то равновелики и треугольники ADN и BNC. Поэтому высоты AA_1 и BB_1 этих треугольников равны. Следовательно, $AB \parallel CD$.

2.505. На продолжении отрезка DP за точку P отложите

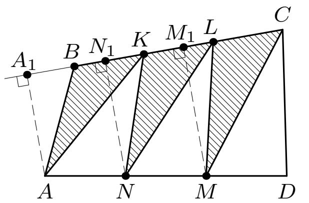


Рис. 396

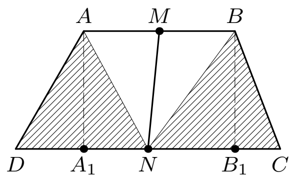


Рис. 397

отрезок $PD_1 = DP$ (рис. 398). Тогда треугольники D_1PB и DPA равны, поэтому $S_{D_1PB} + S_{CPB} = S_{DPA} + S_{CPB} = S_{CPD} = S_{D_1PC}$. Поэтому точка B лежит на отрезке D_1C. Поскольку $D_1B \parallel AD$, то $BC \parallel AD$.

2.506. $\frac{1}{6}$. ▮ Пусть точки K, L, M и N — соответственно середины сторон AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$ (рис. 399). Тогда точка O пересечения KM и LN — центр параллелограмма $ABCD$, точка E пересечения OL и KC — середина OL, точка F пересечения AL и KO — середина KO, поэтому KE и LF — медианы треугольника KOL. Если G — точка их пересечения, то

$$S_{OGE} = \frac{1}{6}S_{KOL} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}S_{OKBL} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{48}.$$

Аналогично для остальных семи треугольников с вершинами в точке O, из которых составлен рассматриваемый восьмиугольник. Следовательно, площадь восьмиугольника равна $8\cdot\frac{1}{48} = \frac{1}{6}$.

2.507. *Указание.* Разрежьте квадрат на 50 равных прямоугольников со сторонами $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{5}$ прямыми, параллельными его сторонам. По крайней мере в один такой прямоугольник попадут не менее трех из указанных точек.

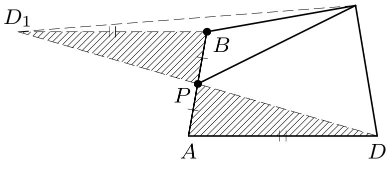


Рис. 398

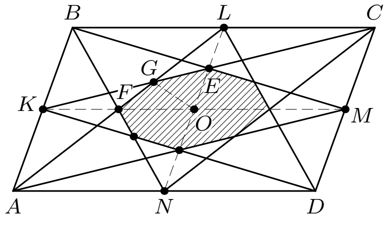


Рис. 399

2.508. Проведем через точку O прямую, отрезок BC которой, заключенный внутри угла, делился бы точкой O пополам (см. задачу **2.35**). Пусть B и C лежат на сторонах AX и AY соответственно (рис. 400). Докажем, что ABC — искомый треугольник. Проведем через точку O прямую, пересекающую AX и AY в точках B_1 и C_1 соответственно. Пусть B_1 лежит между A и B. Обозначим через K точку пересечения прямой B_1C_1 с прямой, проведенной через точку B параллельно AY. Тогда

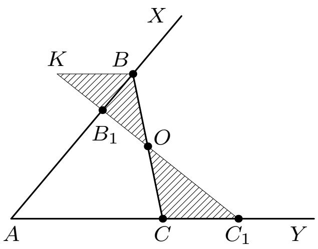


Рис. 400

$$S_{OB_1B} = S_{OKB} - S_{B_1KB} < S_{OKB} = S_{OCC_1}.$$

Следовательно, $S_{ABC} < S_{AB_1C_1}$. Случай, когда точка B лежит между точками A и B_1 рассматривается аналогично.

2.509. Отрезок, соединяющий середины оснований.
▮ Пусть P и Q — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ (рис. 401, *а*), h — высота трапеции. Если точка X принадлежит отрезку PQ, то XP и XQ — медианы треугольников BXC и AXD, поэтому $S_{XBP} = S_{XCP}$ и $S_{XAQ} = S_{XDQ}$. Кроме того,

$$S_{ABPQ} = \frac{1}{2}(BP + AQ) \cdot h = \frac{1}{2}(CP + DQ) \cdot h = S_{CPQD}.$$

Следовательно, $S_{XAB} = S_{XCD}$.

Пусть теперь X — точка внутри трапеции $ABCD$, для которой $S_{XAB} = S_{XCD}$ (рис. 401, *б*). Предположим, что X не лежит

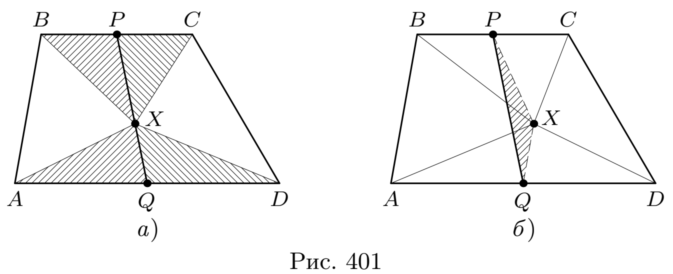


Рис. 401

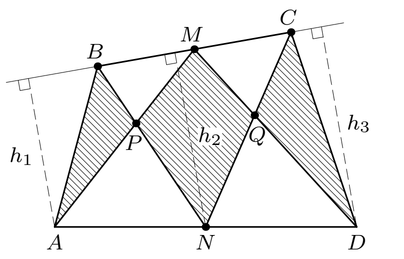


Рис. 402

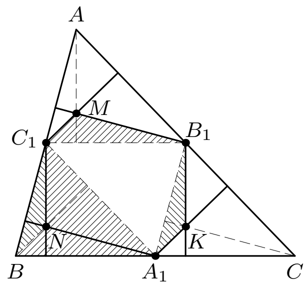


Рис. 403

на прямой PQ. Поскольку $S_{XBP} = S_{XCP}$ и $S_{XAQ} = S_{XDQ}$, то

$$S_{ABPXQ} = S_{CPXQD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Если точки X и C лежат по одну сторону от прямой PQ, то

$$\frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABPQ} + S_{PXQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD} + S_{PXQ},$$

что невозможно. Аналогично для случая, когда точки X и C лежат по разные стороны от прямой PQ.

2.510. Обозначим расстояния от точек A, N и D (рис. 402) до прямой BC через h_1, h_2 и h_3 соответственно, а площади треугольников BPM и CQM — через x и y. Тогда

$$S_{APB} + x = \frac{1}{2}BM \cdot h_1, \qquad S_{CQD} + y = \frac{1}{2}CM \cdot h_3,$$
$$S_{MPNQ} + x + y = \frac{1}{2}BC \cdot h_2.$$

По теореме о средней линии трапеции $h_2 = \frac{1}{2}(h_1 + h_3)$. Поэтому

$$S_{APB} + S_{CQD} + x + y = \frac{1}{2}BM \cdot h_1 + \frac{1}{2}CM \cdot h_3 = \frac{1}{2}CM \cdot (h_1 + h_3) =$$
$$= CM \cdot h_2 = \frac{1}{2}BC \cdot h_2 = S_{BNC} = S_{MPNQ} + x + y.$$

Следовательно,

$$S_{APB} + S_{CQD} = S_{MPNQ}.$$

2.511. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB остроугольного треугольника ABC (рис. 403); пусть также перпендикуляры, опущенные из точки C_1 на AC и из точки B_1 на AB, пересекаются в точке M; из точки C_1 на BC и из точки A_1 на AB — в точке N; из точки A_1 на AC и из точки B_1 на BC — в точке K. Тогда M, N, K — точки пересечения высот треугольников AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1 соответственно.

Треугольник C_1MB_1 равен треугольнику BNA_1, а треугольник A_1KB_1 — треугольнику BNC_1 (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Следовательно,

$$S_{A_1KB_1MC_1N} = S_{A_1B_1C_1} + S_{A_1NC_1} + S_{C_1MB_1} + S_{A_1KB_1} =$$
$$= S_{A_1B_1C_1} + S_{A_1NC_1} + S_{BNA_1} + S_{BNC_1} = S_{A_1B_1C_1} + S_{A_1BC_1} =$$
$$= \frac{1}{4}S_{ABC} + \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

2.512. Пусть O — точка внутри треугольника ABC, через которую проведены три указанные прямые; AM, BN, CK — указанные диагонали трех трапеций (рис. 404). Поскольку $OM \parallel AB$, то $S_{ABM} = S_{ABO}$. Аналогично, $S_{BCN} = S_{BCO}$ и $S_{ACK} = S_{ACO}$. Поэтому

$$S_{ABM} + S_{BCN} + S_{ACK} = S_{ABO} + S_{BCO} + S_{ACO} = S_{ABC}.$$

Если EFP — «внутренний» треугольник, то

$$S_{EFP} = S_{ABC} - S_{ABM} - S_{BCN} - S_{ACK} + S_{AKE} + S_{BMF} + S_{CPN} =$$
$$= S_{ABC} - S_{ABC} + S_{AKE} + S_{BMF} + S_{CPN} = S_{AKE} + S_{BMF} + S_{CPN}.$$

2.513. Пусть точки M, N, K, L принадлежат соответственно сторонам AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$ (рис. 405)

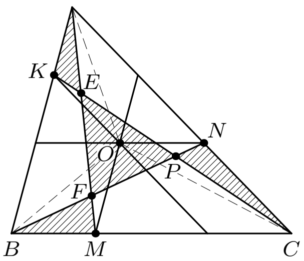


Рис. 404

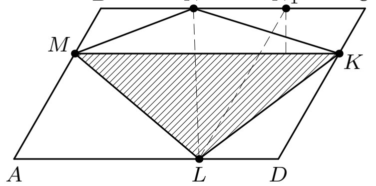


Рис. 405

и $S_{MNKL} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Предположим, что LN не параллельно AB. Проведем через точку L прямую, параллельную AB, до пересечения со стороной BC в точке N_1. Тогда

$$S_{MN_1KL} = S_{MN_1L} + S_{N_1KL} = \frac{1}{2}S_{ABN_1L} + \frac{1}{2}S_{LN_1CD} = \\ = \frac{1}{2}(S_{ABN_1L} + S_{LN_1CD}) = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{MNKL}.$$

Поскольку треугольник MLK — общая часть четырехугольников $MNKL$ и MN_1KL, то $S_{MN_1K} = S_{MNK}$, а так как треугольники MN_1K и MNK имеют общее основание MK, то их высоты, проведенные из точек N_1 и N, равны. Следовательно, $MK \parallel BC$.

§ 2.9

2.517⁰. 4, 8. **2.518.** 5. **2.519.** $\frac{9}{2}$, 9, $\frac{9}{2}$, 9. **2.520⁰.** 8. **2.521⁰.** $\frac{a}{b}$. **2.523.** 1 : 3. **2.525.** $\frac{2a+b}{3}$.

2.526⁰. $\frac{3a+2b}{5}$. ▮ *Первый способ.* Пусть AD и BC — основания трапеции $ABCD$ (рис. 406, *а*), $AD = a$, $BC = b$, M — данная точка на AB ($BM : AM = 3 : 2$), MN — искомый отрезок. Тогда по теореме Фалеса $CN : DN = BM : AM = 3 : 2$. Проведем диагональ AC и обозначим через K ее точку пересечения с MN. Из подобия треугольников AMK и ABC находим, что $MK = \frac{2b}{5}$, а из подобия треугольников CKN и CAD — $KN = \frac{3b}{5}$. Следовательно, $MN = MK + KN = \frac{3a+2b}{5}$.

Второй способ. Через вершину C проведем прямую, параллельную боковой стороне AB (рис. 406, *б*). Пусть P — точка ее пересечения с основанием AD, а Q — с отрезком MN. Из

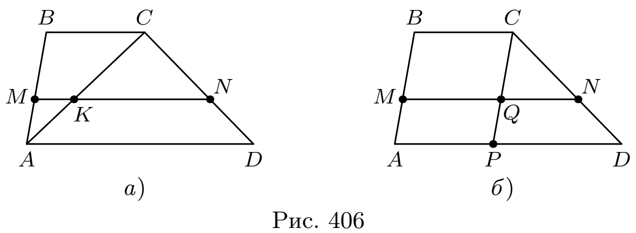


Рис. 406

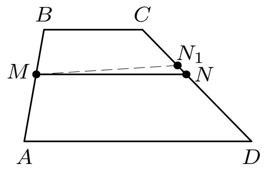


Рис. 407

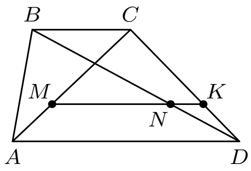


Рис. 408

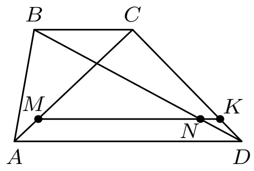


Рис. 409

подобия треугольников CQN и CPD находим $QN = 3 \cdot \frac{1}{5}PD = \frac{3}{5}(a-b)$. Тогда $MN = b + \frac{3}{5}(a-b) = \frac{3a+2b}{5}$.

2.527. $18\sqrt{2}$. **2.528.** 8. **2.529.** $\frac{1}{2}$. **2.531.** $\frac{1}{7}$. **2.532.** $\frac{24}{7}$.

2.535⁰. $\frac{2a+3b}{5}$. ▮ Пусть AD и BC — основания трапеции $ABCD$ (рис. 407), $AD = a$, $BC = b$, точка M принадлежит боковой стороне AB. Проведем через точку M прямую, параллельную основаниям. Пусть N_1 — ее точка пересечения с CD. Из теоремы Фалеса следует, что $CN_1 = 2 \cdot \frac{1}{5}CD = CN$. Поэтому точка N_1 совпадает с N. Следовательно, $MN \parallel AD$. Далее аналогично решению задачи **2.526⁰**.

2.536⁰. $\frac{|2a-b|}{3}$. ▮ Пусть K — точка пересечения указанной прямой с боковой стороной CD, N — с диагональю BD (рис. 408). Поскольку $MK \parallel AD$, то $DK : KC = AM : MC = 1 : 2$ и $DN : NB = DK : KC = 1 : 2$. Из подобия треугольников CMK и CAD находим, что $MK = 2 \cdot \frac{1}{3}AD = \frac{2a}{3}$, а из подобия треугольников DKN и DCB следует, что $NK = \frac{1}{3}BC = \frac{b}{3}$. Следовательно, $MN = MK - NK = \frac{2a-b}{3}$ (если $2a > b$).

2.537⁰. $\frac{4a-b}{5}$. ▮ Проведем через точку M прямую, параллельную основаниям (рис. 409). Пусть K и N_1 — ее точки пересечения со стороной CD и диагональю BD соответственно. Из теоремы Фалеса следует, что $DK : KC = AM : MC = 1 : 4$ и $DN_1 : N_1B = DK : KC = 1 : 4$. Поэтому точка N_1 совпадает с точкой N. Следовательно, $MN \parallel AD$. Далее аналогично решению предыдущей задачи.

2.538. 21.

2.540⁰. Пусть Q — точка пересечения продолжений боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$, M — середина большего

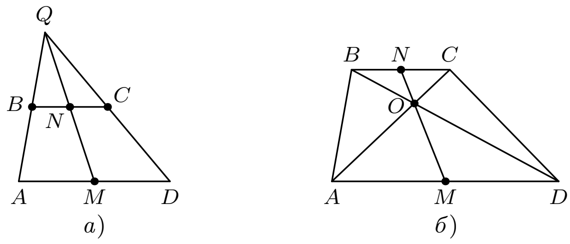


Рис. 410

основания AD (рис. 410, a). Медиана QM треугольника QAD делит пополам меньшее основание BC (см. задачу **2.539⁰**). Следовательно, середины оснований трапеции лежат на прямой, проходящей через точку Q. Из задачи **2.539⁰** также следует, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и середину одного из оснований трапеции, делит пополам второе основание (рис. 410, $б$).

2.541⁰. Пусть точки M и N расположены на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, K и L — точки пересечения прямой MN с диагоналями AC и BD и $MN \parallel BC$ (рис. 411). Треугольник AMK подобен треугольнику ABC, а треугольник DNL — треугольнику DCB, причем коэффициенты подобия одинаковы, так как $AM : AB = DN : DC$. Следовательно, $MK = BC \cdot \frac{AM}{AB} = BC \cdot \frac{DN}{DC} = LN$.

2.542⁰. $\frac{2ab}{a+b}$. ▮ Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$, X и Y — точки пересечения данной прямой с боковыми сторонами AB и CD (рис. 412). Из подобия треугольников BMC и DMA находим, что $AM : MC = AD : BC = a : b$. Поэтому $AM : AC = a : (a + b)$. Из

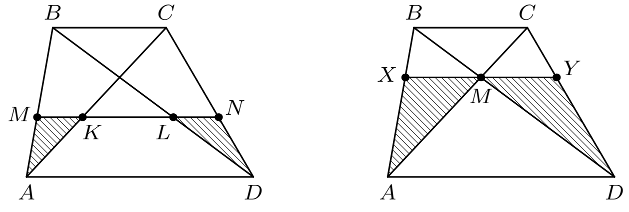


Рис. 411 Рис. 412

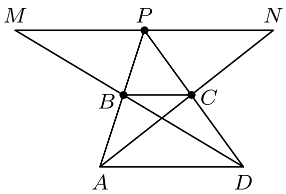


Рис. 413

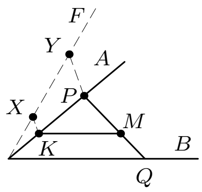


Рис. 414

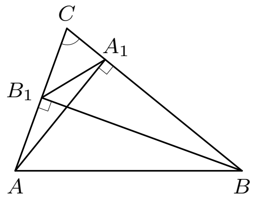


Рис. 415

подобия треугольников AMX и ACB находим, что $MX : BC = AM : AC = a : (a + b)$. Поэтому $MX = \frac{a}{a+b}BC = \frac{ab}{a+b}$. Аналогично находим, что $MY = \frac{ab}{a+b}$. Следовательно, $XY = \frac{2ab}{a+b}$.

2.544. $\frac{2ab}{|a-b|}$. ▌ Пусть $AD = b$ и $BC = a$ $(b > a)$ — основания трапеции $ABCD$, P — точка пересечения прямых AB и CD, M и N — точки пересечения прямых DB и AC с прямой, проходящей через точку P и параллельной основаниям трапеции (рис. 413). Из подобия треугольников BPC и APD следует, что $PC : PD = BC : AD = a : b$, а из подобия треугольников PCN и DCA следует, что $PN : AD = PC : CD = a : (b-a)$. Отсюда находим, что $PN = AD \cdot \frac{a}{b-a} = \frac{ab}{b-a}$. Аналогично, $MP = \frac{ab}{b-a}$. Следовательно, $MN = \frac{2ab}{b-a}$. Если $a > b$, то $MN = \frac{2ab}{a-b}$.

2.546. Предположим, что нужная прямая проведена (рис. 414). Пусть прямая, проходящая через точку M, расположенную внутри данного угла AOB, пересекает стороны OA и OB этого угла в точках P и Q таких, что $MP : MQ = m : n$, где $m : n$ — данное отношение. Через точку M проведем прямую, параллельную OB, до пересечения с лучом OA в точке K. Тогда $PK : OK = PM : MQ = m : n$.

Отсюда вытекает следующий способ построения. На произвольном луче OF отложим последовательно отрезки OX и XY, равные соответственно n и m. Пусть K — точка пересечения с лучом OA прямой, проходящей через данную точку M параллельно OB. Проведем через точку Y прямую, параллельную XK до пересечения с лучом OA в точке P. Тогда PM — искомая прямая.

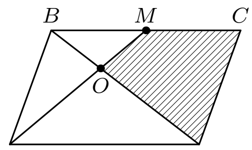


Рис. 416

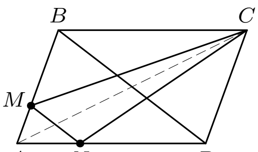


Рис. 417

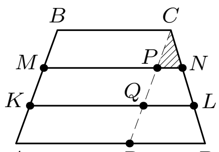


Рис. 418

2.547. 4, 6, 4, 6.

2.548⁰. Треугольники AA_1C и BB_1C подобны по двум углам (рис. 415). Поэтому $CA_1 : CB_1 = CA : CB$. Следовательно, треугольники ABC и A_1B_1C подобны по двум сторонам и углу между ними.

2.549. 3.

2.550. *Указание.* $BC \cdot AM = CD \cdot AN$ (площадь параллелограмма).

2.551. $\frac{5}{12}$. ▮ Из подобия треугольников BOM и DOA находим (рис. 416), что $BO : OD = BM : AD = 1 : 2$. Поэтому $BO : BD = 1 : 3$, а так как $BM : BC = 1 : 2$, то

$$S_{BOM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{BCD} = \frac{1}{12}.$$

Следовательно,

$$S_{OMCD} = S_{BCD} - S_{BOM} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

2.552. $\frac{d}{3}$. ▮ Поскольку $S_{ABC} = S_{CDA}$ и $S_{MBC} = \frac{2}{3} S_{ABC}$, то $AM : MB = 1 : 2$ (рис. 417). Аналогично, $AN : ND = 1 : 2$. Следовательно, треугольник AMN подобен треугольнику ABD с коэффициентом подобия $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$. Поэтому $MN = \frac{1}{3} BD = \frac{d}{3}$.

2.553. $2S$.

2.554. $\frac{S_1+S_2}{2}$. ▮ Пусть MN и KL — указанные прямые, параллельные основаниям AD и BC трапеции $ABCD$ (M и K на AB, N и L на CD); прямая, проходящая через конец C меньшего основания параллельно боковой стороне AB, пересекает MN, KL и AD в точках P, Q и R соответственно (рис. 418). Обозначим площади равных параллелограммов $MBCP$, $KMPQ$ и $AKQR$ через a, а площадь треугольника

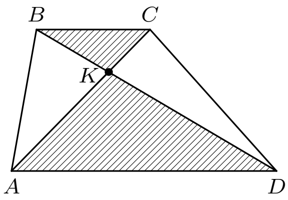


Рис. 419

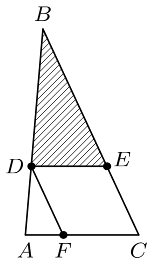


Рис. 420

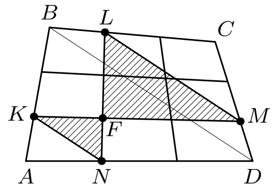


Рис. 421

CPN через b. Тогда

$$S_{QPNL} = 4b - b = 3b, \qquad S_{RQLD} = 9b - 4b = 5b,$$

$$S_1 = S_{MBCN} = a + b, \qquad S_2 = S_{AKLD} = a + 5b,$$

$$S_3 = S_{KMNL} = a + 3b = \frac{2a+6b}{2} = \frac{S_1+S_2}{2}.$$

2.555⁰. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. ▮ Пусть K — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ и $S_{BKC} = S_1$, $S_{AKD} = S_2$ (рис. 419). Из подобия треугольников BKC и DKA следует, что $\frac{CK}{AK} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}$. Поэтому $S_{ABK} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} \cdot S_1$. Аналогично, $S_{DKC} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} \cdot S_1$. Отсюда находим

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2S_1 \cdot \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} = (\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2.$$

2.556. 3, 12, 6, 6. **2.557.** $\frac{2mn}{(m+n)^2}$. **2.558.** $\frac{bc}{a}$.

2.559. 4. ▮ Пусть x — сторона ромба (рис. 420). Поскольку $DE \parallel AC$, то треугольник DBE подобен треугольнику ABC. Поэтому $\frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$, или $\frac{12-x}{12} = \frac{x}{6}$. Отсюда находим, что $x = 4$.

2.561. Пусть точки K, L, M, N принадлежат соответственно сторонам AB, BC, CD, AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ (рис. 421), причем $AK : KB = BL : LC = DM : MC = AN : ND = 1 : 2$; F — точка пересечения KM и NL. Отрезки NK и ML параллельны диагонали BD и $NK = \frac{1}{3}BD$, $ML = 2 \cdot \frac{1}{3}BD$. Из подобия треугольников KFN

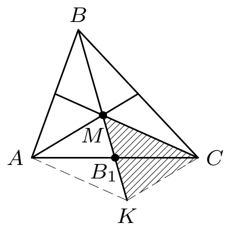


Рис. 422

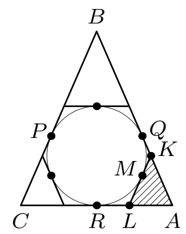


Рис. 423

и MFL следует, что $KF : FM = NF : FL = 1 : 2$. Остальное аналогично.

2.562^{0}. $\frac{3}{4}S$. ▮ Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, B_1 — середина стороны AC (рис. 422). Отложим на продолжении медианы BB_1 за точку B_1 отрезок B_1K, равный отрезку B_1M. Поскольку $AMCK$ — параллелограмм, то $KC = AM$. Поэтому стороны треугольника MCK равны $\frac{2}{3}$ сторон треугольника, составленного из медиан треугольника ABC. Следовательно, искомый треугольник подобен треугольнику MCK с коэффициентом $\frac{3}{2}$, а его площадь равна $\frac{9}{4}$ площади треугольника MCK, т.е. $\frac{9}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6}S = \frac{3}{4}S$.

2.563. $\frac{2mn}{m+2n}$, $\frac{n(m+n)}{m+2n}$, $\frac{n(m+n)}{m+2n}$. ▮ Пусть P, Q и R — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AB и AC треугольника ABC ($AB = BC$) (рис. 423). Тогда $AQ = AR = n$, $BP = BQ = m$, $CP = CR = n$, $AC = 2n$, а периметр треугольника ABC равен $2(m+n)+2n = 2(m+2n)$. Пусть прямая, параллельная стороне BC, касается окружности в точке M и пересекает стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Тогда $KM = KQ$, $LM = LR$. Поэтому периметр треугольника AKL равен $AK + KL + AL = AK + KM + ML + AL = AK+KQ+RL+AL = AQ+AR = 2n$. Коэффициент подобия треугольников AKL и ABC равен отношению их периметров, т.е. $\frac{n}{m+2n}$. Следовательно,

$$KL = \frac{n}{m+2n}BC = \frac{n(m+n)}{m+2n}.$$

Аналогично находим остальные искомые отрезки.

2.564^0. $\frac{6a}{7}$, $\frac{2a}{7}$. ▌ Обозначим $CN = x$. Из подобия треугольников AKN и BKP (рис. 424) находим, что $BP = AN \cdot \frac{BK}{AK} = \frac{2}{3}(a + x)$, а из подобия треугольников CMN и BMP — что $BP = CN \cdot \frac{BM}{MC} = 3x$. Из уравнения $\frac{2}{3}(a + x) = 3x$ находим, что $x = \frac{2a}{7}$. Следовательно, $CN = \frac{2a}{7}$ и $BP = 3x = \frac{6a}{7}$.

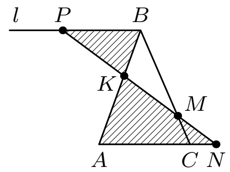


Рис. 424

2.565. 2 : 1, считая от точки B. ▌ *Первый способ.* Пусть M — точка пересечения KN и BC (рис. 425, *а*). В треугольнике ABN отрезки BC и NK — медианы. Поэтому $BM : MC = 2 : 1$.

Второй способ. Пусть M — точка пересечения KN и BC (рис. 425, *б*). Через вершину B проведем прямую, параллельную AC, и продолжим NK до пересечения с этой прямой в точке T. Далее рассмотрим две пары подобных треугольников: AKN и BKT, CMN и BMT.

2.566. 4 : 1.

2.567. 1 : 9, считая от точки B. *Указание.* Проведите через вершину B прямую, параллельную стороне AC, и рассмотрите две пары подобных треугольников.

2.568. 5 : 1. ▌ Через точку B проведем прямую, параллельную AC (рис. 426). Пусть T — точка ее пересечения с прямой MK. Обозначим $AC = a$, $CN = x$. Из подобия треугольников TBK и NAK (коэффициент $\frac{1}{4}$) находим, что $TB = \frac{1}{4}AN = \frac{a+x}{4}$, а из подобия треугольников TBM и NCM (коэффициент $\frac{3}{2}$) следует, что $TB = 3 \cdot \frac{1}{2}CN = \frac{3x}{2}$. Из уравнения $\frac{a+x}{4} = \frac{3x}{2}$

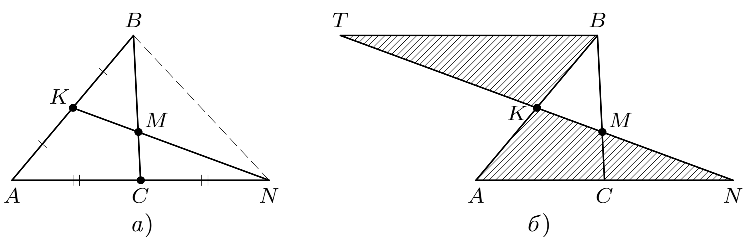


Рис. 425

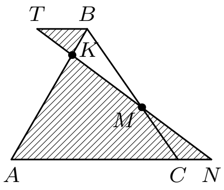


Рис. 426

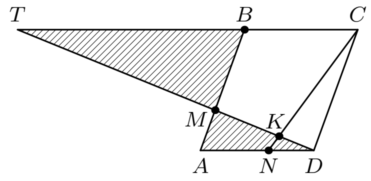


Рис. 427

находим, что $x = \frac{a}{5}$. Следовательно, $AC : CN = a : \frac{a}{5} = 5 : 1$.

2.569⁰. 6 : 11, 15 : 2. ▮ Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке T (рис. 427). Обозначим $DN = 2a$, $AN = 3a$. Из подобия треугольников TBM и DAM (коэффициент 2) находим $TB = 2AD = 10a$, а из подобия треугольников TCK и DKN получаем $\frac{CK}{KN} = \frac{CT}{DN} = \frac{15a}{2a} = \frac{15}{2}$. Аналогично находим, что $\frac{DK}{KM} = \frac{6}{11}$.

2.570. 1 : 1, 1 : 3.

2.571⁰. 1 : 3, считая от точки A. ▮ Через вершину B проведем прямую, параллельную AC, и продолжим CE и AK до пересечения с ней в точках P и Q соответственно (рис. 428). Если F — точка пересечения прямой BM со стороной AC, то треугольник PBM подобен треугольнику CFM, а треугольник QMB — треугольнику AFM, причем коэффициент подобия один и тот же — $\frac{BM}{MF}$. Поэтому $\frac{AF}{FC} = \frac{BQ}{BP} = \frac{AC/2}{3\cdot AC/2} = \frac{1}{3}$ ($BQ = AC/2$ из подобия треугольников BKQ и CKA, а $BP = 3 \cdot AC/2$ из подобия треугольников PBE и CAE).

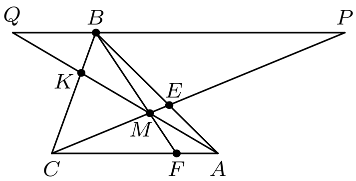


Рис. 428

2.572. 1 : 6, считая от точки A. *Указание.* Через вершину B проведите прямую, параллельную AC.

2.573⁰. Пусть CD — биссектриса треугольника ABC (рис. 429). Проведем через вершину A прямую, параллельную BC, и продолжим биссектрису до пересечения с этой прямой в точке K. Тогда $\angle ACK = \angle KCB = \angle CKA$, поэтому

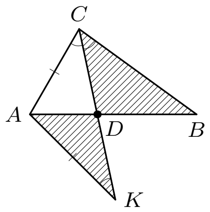


Рис. 429

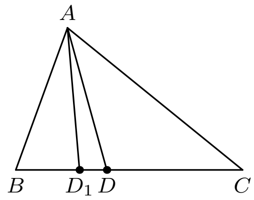


Рис. 430

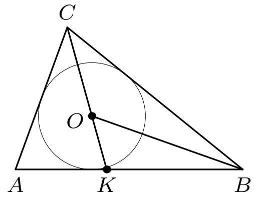


Рис. 431

треугольник CAK — равнобедренный, $AK = AC$. Из подобия треугольников ADK и BDC следует, что $AK : BC = AD : DB$, а так как $AK = AC$, то $AC : BC = AD : DB$.

2.575⁰. Если AD_1 — биссектриса треугольника ABC (рис. 430), то $BD_1 : AB = D_1C : AC$, откуда $BD_1 = BC\cdot\frac{AB}{AB+AC} = BD$. Следовательно, точки D и D_1 совпадают.

2.576. $\frac{a+b}{c}$. ▮ Пусть CK — биссектриса треугольника ABC, O — центр вписанной окружности (рис. 431). Тогда BO — биссектриса треугольника BCK. По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{BK}{KA} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}, \qquad BK = \frac{ac}{a+b}, \qquad \frac{CO}{OK} = \frac{BC}{BK} = \frac{a}{\frac{ac}{a+b}} = \frac{a+b}{c}.$$

2.577. $\sqrt{b(b+c)}$. ▮ Поскольку треугольник ADB — равнобедренный, то $\angle ABC = \angle BAD = \angle DAC$ (рис. 432). Следовательно, треугольники ADC и BAC подобны (по двум углам). Поэтому $\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC}$. Следовательно, $DC = \frac{AC^2}{BC} = \frac{b^2}{BC}$. С другой стороны, по свойству биссектрисы треугольника имеем: $\frac{DC}{BC} = \frac{AC}{AC+AB} = \frac{b}{b+c}$. Отсюда находим, что $DC = BC\frac{b}{b+c}$. Из равенства $\frac{b^2}{BC} = BC\frac{b}{b+c}$ следует, что $BC^2 = b(b+c)$.

2.578. $\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{3}}$ или $\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{3}}$.

2.579⁰. $\sqrt{ab}$. ▮ Пусть вписанная окружность касается боковой стороны AB трапеции $ABCD$ в точке M, а боковой стороны CD — в точке N. Центр O этой окружности расположен на средней линии PQ трапеции (точка Q — середина CD), а проекция K точки O на MN — середина MN (рис. 433). Поскольку

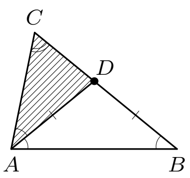


Рис. 432

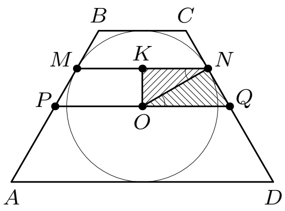


Рис. 433

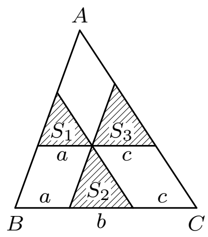


Рис. 434

трапеция описана около окружности,

$$PQ = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{2}(a + a) = a.$$

Тогда $OQ = \dfrac{a}{2}$. Из подобия треугольников OKN и QNO следует, что $\dfrac{KN}{ON} = \dfrac{ON}{OQ}$, откуда находим, что $ON^2 = OQ \cdot KN = $ $= \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{b}{2} = \dfrac{ab}{4}$. Поскольку ON — радиус вписанной окружности, а высота данной трапеции равна диаметру, то эта высота равна $\sqrt{ab}$.

2.580. 2. *Указание.* Данная касательная отсекает от треугольника подобный ему треугольник с коэффициентом, равным отношению их периметров.

2.581. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$. ▮ Каждый из образованных треугольников подобен данному с коэффициентом $\dfrac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$, $\dfrac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}$, $\dfrac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}$, где S — искомая площадь данного треугольника ABC (рис. 434). Обозначим стороны этих треугольников, соответствующие стороне BC треугольника ABC, через a, b и c соответственно. Тогда

$$a + b + c = BC \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{a}{BC}, \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{b}{BC}, \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{c}{BC}.$$

Сложив почленно последние три равенства, получим:

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{a + b + c}{BC} = 1.$$

Отсюда находим, что $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$.

2.582. $\dfrac{2S}{9}$. ▮ Пусть ABC — данный треугольник. Обозначим указанные точки деления, как показано на рисунке 435.

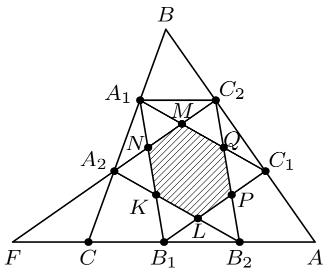


Рис. 435

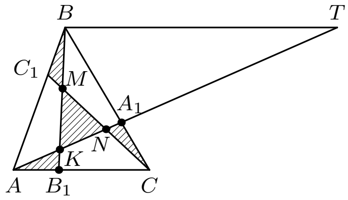


Рис. 436

Тогда $S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{S}{3}$. Пусть F — точка пересечения прямых C_2A_2 и AC; $MNKLPQ$ — указанный шестиугольник. Из равенства треугольников FA_2C и $C_2A_2A_1$ следует, что $CF = C_2A_1 = \dfrac{1}{3}AC = CB_1$. Из подобия треугольников A_1NC_2 и B_1NF находим, что $\dfrac{A_1N}{NB_1} = \dfrac{C_2A_1}{B_1F} = \dfrac{1}{2}$. Аналогично, $\dfrac{A_1M}{MC_1} = \dfrac{1}{2}$. Поэтому $S_{A_1MN} = \dfrac{1}{9}S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{S}{27}$. Аналогично, $S_{B_1KL} = S_{C_1PQ} = \dfrac{S}{27}$. Следовательно,

$$S_{MNKLPQ} = \frac{S}{3} - 3\cdot\frac{S}{27} = \frac{S}{3} - \frac{S}{9} = \frac{2S}{9}.$$

2.583. 1 : 1.

2.584$^{\mathbf{0}}$. $\dfrac{1}{7}$. ▮ Пусть K — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1 (рис. 436). Через точку B проведем прямую, параллельную AC, и продолжим AA_1 до пересечения с этой прямой в точке T. Треугольники BA_1T и CA_1A подобны с коэффициентом 2. Поэтому $BT = 2AC = 6AB_1$, а из подобия треугольников BKT и B_1KA находим, что $\dfrac{BK}{KB_1} = \dfrac{BT}{AB_1} = 6$. Поэтому

$$S_{AB_1K} = \frac{1}{7}S_{ABB_1} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}\cdot S_{ABC} = \frac{1}{21}.$$

Аналогично находим, что $S_{BMC_1} = S_{CNA_1} = \dfrac{1}{21}$, где M — точка пересечения BB_1 и CC_1, а N — AA_1 и CC_1. Следовательно,

$$S_{MNK} =$$
$$= S_{ABC} - S_{ABB_1} - S_{BCC_1} - S_{CAA_1} + S_{AKB_1} + S_{BMC_1} + S_{CNA_1} =$$
$$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}.$$

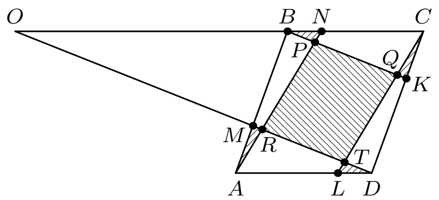


Рис. 437

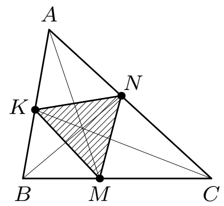


Рис. 438

2.585. $\frac{6}{13}$. ▮ Пусть P — точка пересечения отрезков AN и BK, Q — BK и CL, T — CL и DM, R — AN и DM (рис. 437). Продолжим DM до пересечения с продолжением CB в точке O. Из подобия образовавшихся треугольников OMB и DMA, OTC и DTL находим, что $CT : TL = 12 : 1$. Поэтому $S_{DTL} = \frac{1}{13}S_{CLD} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{8}$. Аналогично, $S_{BPN} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{8}$ и $S_{CKQ} = S_{ARM} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{6}$. Следовательно,

$$S_{PQTR} = S_{ABCD} - 2S_{BCK} - 2S_{ABN} + 2S_{BPN} + 2S_{ARM} = 1 - \frac{2}{6} - \frac{2}{8} + \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{13}.$$

2.587. Пусть AM, BN и CK — биссектрисы треугольника ABC и $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$ (рис. 438). Если $S_{ABC} = S$, то $S_{AKN} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot S$. По свойству биссектрисы треугольника $AK : KB = AC : BC = b : a$ и $AN : NC = AB : BC = c : a$. Поэтому $AK : AB = b : (a + b)$ и $AN : AC = c : (a + c)$. Следовательно, $S_{AKN} = \frac{bcS}{(a+b)(a+c)}$. Аналогично для треугольников BKM и CMN. Тогда

$$S_{KMN} = S - \frac{bcS}{(a+b)(a+c)} - \frac{acS}{(a+b)(b+c)} - \frac{abS}{(a+c)(b+c)} = \frac{2abcS}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

2.588. 60. ▮ Треугольник ABD равнобедренный, так как его биссектриса BF является высотой (рис. 439). Поэтому $AF = FD$ и $S_{AFE} = S_{DFE} = 5$. Кроме того, $BC = 2BD = 2AB$. Тогда по свойству биссектрисы треугольника $\frac{EC}{AE} = \frac{BC}{AB} = 2$. Следовательно, $S_{DEC} = 2S_{ADE} = 4S_{DEF} = 20$, а $S_{ADC} = 30$. Поэтому $S_{ABC} = 2S_{ADC} = 60$.

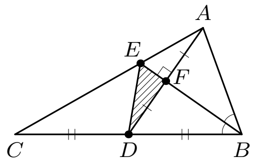


Рис. 439

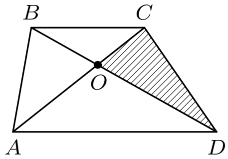


Рис. 440

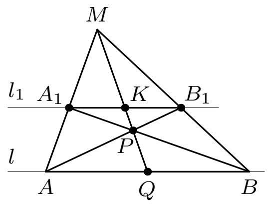


Рис. 441

2.589. Из условия задачи следует, что $\frac{S_{ODC}}{S_{BOC}} = \frac{S_{AOD}}{S_{ODC}}$, поэтому $\frac{OD}{OB} = \frac{AO}{OC}$ (рис. 440). Значит, треугольники BOC и DAO подобны. Следовательно, $\angle BCO = \angle DAO$. Поэтому $BC \parallel AD$.

2.590. Пусть точки A и B лежат на прямой l (рис. 441). Возьмем точку M так, чтобы точки M и A лежали по разные стороны от прямой l_1. Пусть отрезки MA и MB пересекают прямую l_1 соответственно в точках A_1 и B_1. Обозначим через P точку пересечения диагоналей AB_1 и BA_1 трапеции AA_1B_1B. Тогда прямая MP делит отрезок AB пополам (замечательное свойство трапеции).

2.591. Пусть сначала точка M и прямая l лежат по разные стороны от прямой l_1 (рис. 442). Возьмем на на прямой l две точки A и B. Пусть A_1 и B_1 — точки пересечения MA и MB с прямой l_1, P — точка пересечения диагоналей AB_1 и BA_1 трапеции AA_1B_1B, K и Q — точки пересечения прямой MP с A_1B_1 и AB соответственно. Если T — точка пересечения прямых AK и QB_1, то прямая TM — искомая. Действительно, поскольку $A_1K = KB_1$, то $\frac{TB_1}{TQ} = \frac{KB_1}{AQ} = \frac{AK}{AQ} = \frac{MK}{MQ}$, поэтому $\frac{QB_1}{B_1T} = \frac{QK}{KM}$. Следовательно, $MT \parallel KB_1 \parallel l$.

Если точка M лежит внутри полосы между прямыми l и l_1, то через произвольную точку M_1, лежащую вне этой полосы, проведем прямую l_2, параллельную прямым l_1 и l (указанным выше способом), а затем через точку M проведем прямую, параллельную прямым l_1 и l_2.

2.593. 3. ▮ Треугольники ABD и ACD равновелики (рис. 443), так как $S_{ABD} = S_{ABE} + S_{AED} = S_{DCE} + S_{AED} = S_{ACD}$. Тогда их высоты, опущенные на общее основание AD, равны. Следовательно, $BC \parallel AD$. Поэтому треугольники BEC

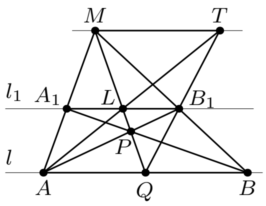


Рис. 442

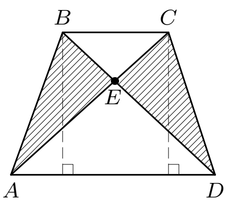


Рис. 443

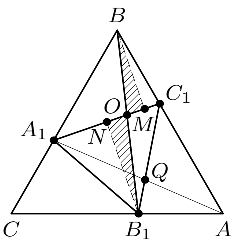


Рис. 444

и DEA подобны. Обозначим $BC = x$. Тогда коэффициент подобия равен $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{x}{3}$. Имеем $S_{BEC} = \dfrac{x}{3} \cdot S_{DEC} = \dfrac{x}{3}$, $S_{DEA} = \dfrac{3}{x} \cdot S_{ABE} = \dfrac{3}{x}$. По условию задачи $S_{BEC} + S_{DEA} \leqslant 2$, т. е. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x} \leqslant 2$, но для любого положительного x верно неравенство $\dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x} \geqslant 2$, причем равенство достигается, только если $x = 3$.

2.594. $1 + 3k$. ▮ Если Q — точка пересечения отрезков AA_1 и C_1B_1, то $\dfrac{AQ}{QA_1} = \dfrac{BO}{OB_1} = k$ (рис. 444). Аналогично для точки пересечения отрезков CC_1 и A_1B_1. Опустим из точек B и B_1 перпендикуляры BM и B_1N на прямую A_1C_1. Тогда треугольники BMO и B_1NO подобны, $\dfrac{BM}{B_1N} = \dfrac{BO}{OB_1} = k$. Поэтому $S_{A_1C_1B} = kS_{A_1B_1C_1}$. Аналогично получим равенства $S_{B_1C_1A} = kS_{A_1B_1C_1}$ и $S_{A_1B_1C} = kS_{A_1B_1C_1}$. Следовательно, $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1} + 3kS_{A_1B_1C_1} = (1 + 3k)S_{A_1B_1C_1}$.

§ 2.10

2.595. 30°, 60°, 90°. **2.596.** а) 60°, 65°, 55°; б) 20°, 55°, 105°. **2.597.** 40°, 80°, 60° или 20°, 100°, 60°. **2.598.** 35°, 55°. **2.599.** 8, 4, $4\sqrt{3}$. **2.600.** 96°, 132°, 84°, 48°.

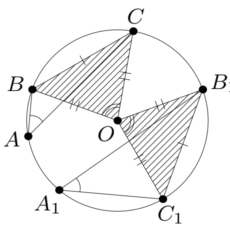


Рис. 445

2.601⁰. Обратное неверно. ▮ Пусть точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 лежат на окружности с центром O и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ (рис. 445). Тогда равны и соответствующие центральные углы, т. е. $\angle BOC = \angle B_1OC_1$, значит, равны равнобедренные треугольники BOC и B_1OC_1. Следовательно,

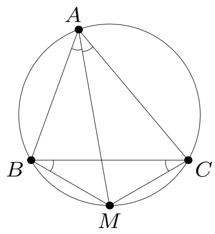


Рис. 446

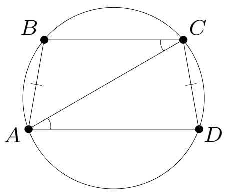


Рис. 447

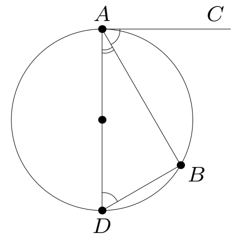


Рис. 448

$BC = B_1C_1$. Если два вписанных угла опираются на равные хорды то они либо равны, либо составляют в сумме $180°$.

2.602. $BM = CM$ как хорды, на которые опираются равные вписанные углы (рис. 446).

2.603⁰. Пусть трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана в окружность (рис. 447). Тогда вписанные углы ACB и CAD равны как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми BC и AD и секущей AC. Следовательно, равны и хорды, на которые они опираются, т. е. $AB = CD$.

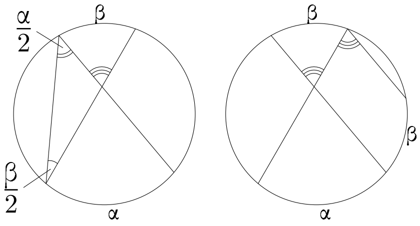
2.604. $60°$, $120°$, $60°$, $120°$. *Указание.* Соедините центр окружности с вершинами меньшего основания трапеции. Три полученных треугольника равны по трем сторонам.

2.606⁰. Если указанный угол прямой, то утверждение очевидно, так как в этом случае хорда является диаметром. Пусть угол между касательной AC и хордой AB острый (рис. 448). Проведем диаметр AD. Тогда углы BAC и ADB равны, так как каждый из них в сумме с углом BAD составляет $90°$. Но угол ADB равен половине дуги AB, заключенной между касательной AC и хордой AB. Если угол CAB тупой, то его смежный угол острый, значит, он равен половине дуги AB, не содержащей точку D. Следовательно, угол CAB равен половине оставшейся дуги.

2.607. $110°$, $250°$.

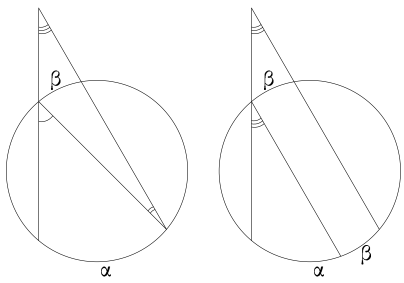
2.608⁰. $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. *Указание. Первый способ.* Соедините концы двух хорд и рассмотрите внешний угол полученного треугольника (рис. 449, *а*).

Второй способ. Через конец одной хорды проведите прямую, параллельную второй хорде (рис. 449, *б*).



а) *б*)

Рис. 449



а) *б*)

Рис. 450

2.609⁰. $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. *Указание.* См. рис. 450, *а* и 450, *б*.

2.610. 540°.

2.611. $\frac{h}{\sqrt{3}}$. ▌ Пусть O — центр окружности, описанной около равнобокой (см. задачу **2.603⁰**) трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 451). Если H — проекция вершины C на большее основание AD, то отрезок AH равен средней линии трапеции (см. задачу **2.118⁰**), а так как $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle COD = 60^\circ$, то $AH = CH \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

2.612. *Указание.* Примените теорему о средней линии треугольника.

2.613⁰. Поскольку отрезок AB виден из точек A_1 и B_1 под прямым углом (рис. 452), эти точки лежат на окружности с диаметром AB. Поэтому

$$\angle CA_1B_1 = 180^\circ - \angle BA_1B_1 = \angle CAB.$$

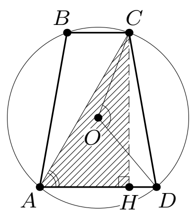


Рис. 451

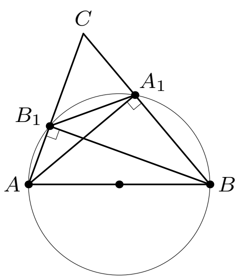


Рис. 452

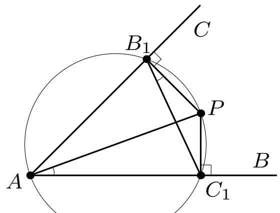


Рис. 453

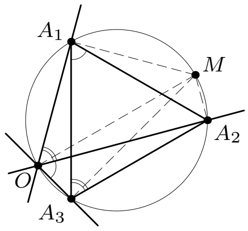


Рис. 454

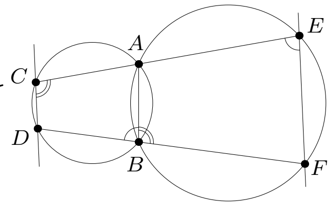


Рис. 455

2.614. Поскольку отрезок AP виден из точек B_1 и C_1 под прямым углом, то точки C_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром AP (рис. 453). Следовательно, $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

2.615. $80°$.

2.616. $90° + \alpha$.

2.617. Пусть точка M расположена, как показано на рисунке 454; A_1, A_2, A_3 — проекции точки M на данные прямые. Поскольку отрезок OM виден из точек A_1, A_2, A_3 под прямым углом, то точки O, M, A_1, A_2, A_3 лежат на окружности с диаметром OM. Тогда $\angle A_2A_1A_3 = \angle A_2OA_3 = 60°$ и $\angle A_1A_3A_2 = \angle A_1OA_2 = 60°$.

2.618. *Указание.* Дуги AC и AD равны, так как они симметричны относительно диаметра AB.

2.619. Пусть отрезки CE и FD не пересекаются (рис. 455). Соединим точки A и B. Поскольку

$$\angle ABD = 180° - \angle C, \qquad \angle ABF = 180° - \angle ABD,$$

то $\angle ABF = \angle C$, а так как $\angle AEF = 180° - \angle ABF$, то $\angle CEF + \angle C = 180°$. Следовательно, $CD \parallel EF$. Аналогично для случая, когда отрезки CE и FD пересекаются.

2.620. Каждый из двух смежных углов MQN и MQL (где Q — точка пересечения хорд) равен полусумме соответствующих дуг (рис. 456).

2.621. Пусть окружность, проходящая через точки A и B (рис. 457), касается второй стороны угла с вершиной O в точке M, а K — произвольная точка луча OM, отличная от M. Поскольку точка K лежит вне окружности, отрезок AK

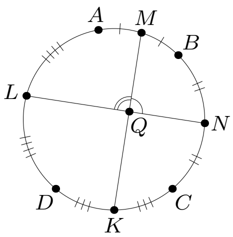


Рис. 456

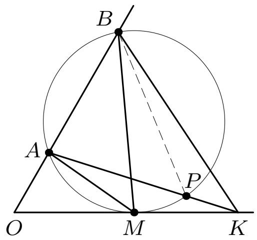


Рис. 457

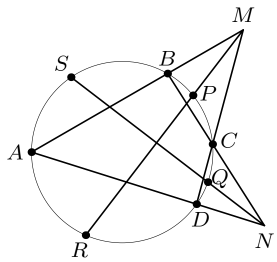


Рис. 458

пересекает окружность в некоторой точке P. Поэтому

$$\angle AMB = \angle APB > \angle AKB.$$

2.622. Пусть биссектриса угла BMC пересекает окружность в точках P и R, а биссектриса угла BNA — в точках Q и S (рис. 458). Тогда

$$\smile AS - \smile DQ = \smile BS - \smile CQ \quad \text{и} \quad \smile DR - \smile CP = \smile AR - \smile BP$$

(см. задачу **2.609⁰**), или

$$\smile BS + \smile DQ = \smile AS + \smile CQ \quad \text{и} \quad \smile AR + \smile CP = \smile DR + \smile BP.$$

Следовательно,

$$\smile AS + \smile AR + \smile CP + \smile CQ = \smile BS + \smile BP + \smile DR + \smile DQ = 180^\circ.$$

Поэтому угол между хордами PR и SQ равен 90° (см. задачу **2.608⁰**).

2.623⁰. Обозначим $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ (рис. 459). Тогда

$$\angle BOM = \angle ABO + \angle BAO = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2},$$
$$\angle OBM = \angle OBC + \angle CBM = \angle OBC + \angle MAC = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, $\angle BOM = \angle OBM$. Аналогично, $\angle MCO = \angle MOC$.

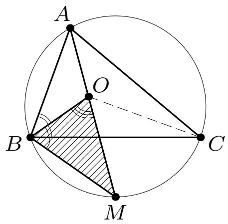


Рис. 459

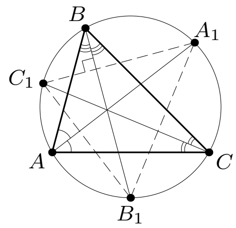


Рис. 460

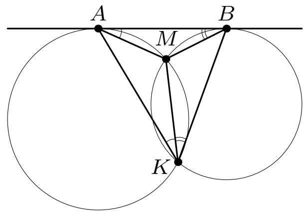


Рис. 461

2.624. Угол между хордами BB_1 и C_1A_1 равен полусумме дуг BA_1 и C_1AB_1 (рис. 460). Поскольку

$$\smile BA_1 = 2 \cdot \angle BAA_1 = \angle A$$

и

$$\smile C_1AB_1 = \smile C_1A + \smile AB_1 = 2\angle ACC_1 + 2\angle ABB_1 = \angle C + \angle B,$$

то

$$\frac{1}{2}(\smile BA_1 + \smile C_1AB_1) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Следовательно, $BB_1 \perp C_1A_1$.

2.625. $\angle AKM = \angle BAM$, $\angle BKM = \angle ABM$, $\angle AMB + \angle AKB = \angle AMB + \angle BAM + \angle ABM = 180^\circ$ (рис. 461).

2.626. *Указание.* Соедините точку A с серединой меньшей дуги AB.

2.627. $\sqrt{a(a+b)}$, $\sqrt{b(a+b)}$. ▮ Пусть P и Q — проекции точек A и B на указанную касательную, CM — высота треугольника ABC (рис. 462). Треугольник AMC равен треугольнику APC, так как $\angle PCA = \angle ABC = \angle ACM$ (по теореме об угле между касательной и хордой). Следовательно, $AM = AP = a$. Аналогично, $BM = b$. Поэтому $AC^2 = AM \cdot AB = a(a+b)$ и $BC^2 = BM \cdot AB = b(a+b)$.

2.628. Пусть точка E лежит на продолжении стороны BC за точку B (рис. 463). Тогда

$$\angle EAD = \angle EAB + \angle BAD = \angle ACB + \angle DAC = \angle EDA.$$

Следовательно, треугольник ADE равнобедренный, $AE = ED$.

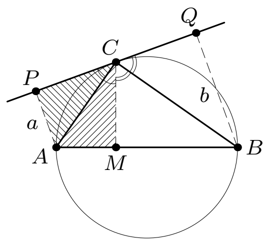


Рис. 462

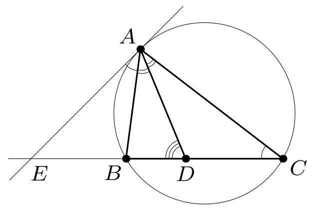


Рис. 463

2.629. Пусть точка Q принадлежит лучу KB (рис. 464). Проведем касательную KF к первой окружности (точки F и Q лежат по разные стороны от прямой AK). Тогда KF перпендикулярно диаметру KM и $\angle AKF = \angle ABK = \angle APQ$. Следовательно, $KF \parallel PQ$. Поэтому прямая PQ перпендикулярна диаметру KM.

2.630$^{\mathbf{0}}$. Пусть K — середина AD, а прямая KM пересекает сторону BC в точке H (рис. 465). Обозначим $\angle ADB = \alpha$. Тогда

$$\angle MCH = \angle ACB = \angle ADB = \angle KMD = \angle BMH = \alpha,$$
$$\angle HMC = 90^\circ - \alpha.$$

Следовательно,

$$\angle MHC = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ.$$

2.631. 1, 1, $\sqrt{3}$, 30°, 30°, 120°. *Указание.* CO — биссектриса угла C (рис. 466), $\angle EOD = 180^\circ - \angle C$ и $\angle EOD = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$ (см. задачу **1.116$^{\mathbf{0}}$**).

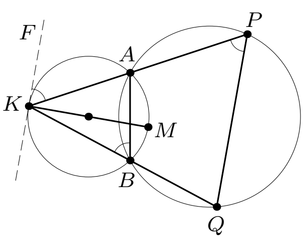


Рис. 464

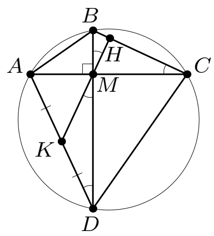


Рис. 465

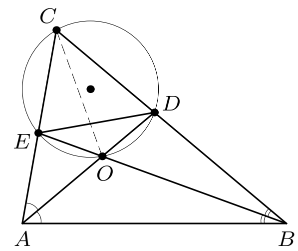


Рис. 466

2.632⁰. Пусть сумма углов при противоположных вершинах A и C четырехугольника $ABCD$ равна 180°. Опишем окружность около треугольника BCD. Предположим, что вершина A лежит вне этой окружности (рис. 467). Тогда отрезок AB пересекает окружность в некоторой точке A_1. Четырехугольник A_1BCD вписан в окружность, поэтому $\angle BA_1D = 180^\circ - \angle C = \angle A$, что невозможно, так как BA_1D — внешний угол треугольника AA_1D. Аналогично докажем, что вершина A не может лежать внутри окружности.

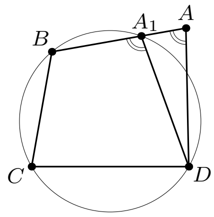


Рис. 467

2.633. *Указание.* $\angle BAD = \angle CDP$, $\angle BAC = \angle DCP$.

2.634⁰. Дуги (без концов) двух равных окружностей. *Указание.* Углы, опирающиеся на одну хорду, равны или составляют в сумме 180°.

2.635. 50°. *Указание.* Поскольку $\angle ACD = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ = \angle ABD$, точки A, B, C и D лежат на одной окружности (рис. 468).

2.636. 25°. *Указание.* Поскольку $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$, точки A, B, C и D лежат на одной окружности (рис. 469).

2.637. Пусть A, B, C и D — центры окружностей, K, L, M и N — точки касания окружностей, лежащие на отрезках AB, BC, CD и AD соответственно (рис. 470). Обозначим углы при вершинах четырехугольника $ABCD$ через α, β, γ и δ соответственно. Тогда

$$\angle NKL = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Аналогично, $\angle LMN = \dfrac{1}{2}(\gamma + \delta)$. Значит,

$$\angle NKL + \angle LMN = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Следовательно, около четырехугольника $KLMN$ можно описать окружность.

2.638. *Указание.* Если AB — данная сторона треугольника ABC, то искомая вершина C принадлежит геометрическому месту точек, из которых данный отрезок виден под данным углом (см. задачу **2.634⁰**).

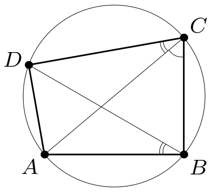


Рис. 468

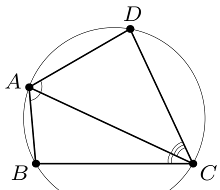


Рис. 469

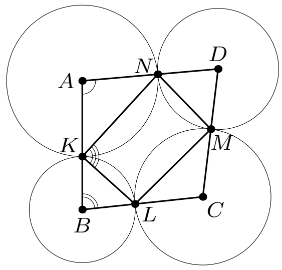


Рис. 470

2.639. *Указание.* Если O — центр вписанной окружности треугольника ABC, то $\angle AOB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$ (см. задачу $\mathbf{1.116^0}$).

2.640. 30°, 60°, 90°. *Указание.* Пусть прямая DE пересекает сторону AB в точке M (рис. 471). Точки B, C, D и M лежат на окружности с диаметром BD, MK — медиана прямоугольного треугольника AME, проведенная к гипотенузе, $\angle MKC = 120^\circ$, точка K также лежит на окружности с диаметром BD.

2.641. 165° или 105°. ▮ Если точки O и B лежат по разные стороны от прямой AC (рис. 472), то $\angle ABC = 150^\circ$, а так как AM и CM — биссектрисы треугольника ABC, то

$$\angle AMC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC = 90^\circ + 75^\circ = 165^\circ.$$

Второй случай рассматривается аналогично.

2.642. *Указание.* $\angle DME = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A = 120^\circ$, точки A, D, M и E лежат на одной окружности, AM — биссектриса угла A (рис. 473).

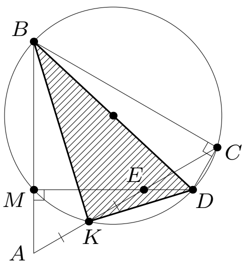


Рис. 471

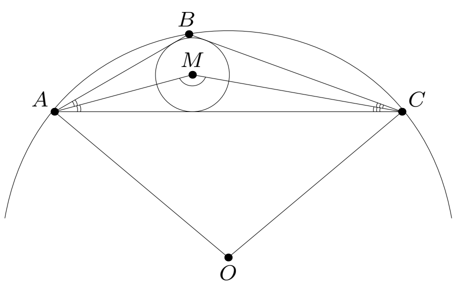


Рис. 472

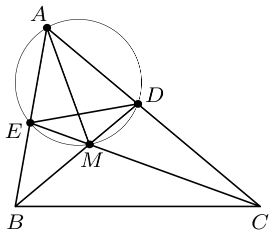


Рис. 473

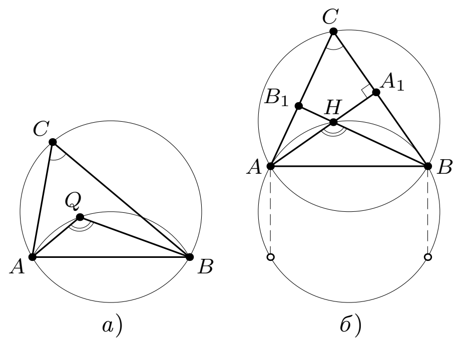


Рис. 474

2.643. а) Две дуги окружностей. ▮ Пусть Q — точка пересечения биссектрис треугольника ABC (рис. 474, *а*). Тогда $\angle AQB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$. Для каждой из двух дуг угол C постоянен, поэтому искомым геометрическим местом точек являются две дуги, из которых отрезок AB виден под углом $90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$.

б) Окружность без двух точек. ▮ Пусть H — точка пересечения высот AA_1 и BB_1 треугольника ABC (рис. 474, *б*). Тогда $\angle AHB = 180^\circ - \angle C$. Поэтому точка пересечения высот каждого треугольника ABC лежит на окружности, симметричной данной относительно прямой AB. С другой стороны, каждая точка окружности, симметричной данной относительно прямой AB (за исключением двух точек, лежащих на перпендикулярах к AB, проходящих через точки A и B), является точкой пересечения высот треугольника ABC с вершиной C, лежащей на данной окружности.

2.644⁰. Пусть ABC — остроугольный треугольник (рис. 475), H — точка пересечения его высот, H_1 — точка пересечения продолжения отрезка AH за точку H с описанной окружностью треугольника ABC. Тогда

$$\angle BH_1H = \angle BH_1A = \angle ACB = \angle BHH_1.$$

Поэтому треугольник HBH_1 равнобедренный. Следовательно, перпендикуляр BC к его стороне HH_1 проходит через середину отрезка HH_1, т. е. точка H_1 симметрична точке H относительно прямой BC. Аналогично для тупоугольного треугольника.

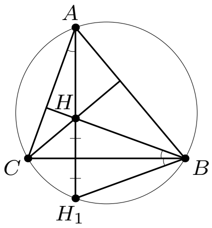


Рис. 475

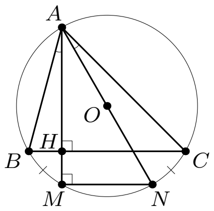


Рис. 476

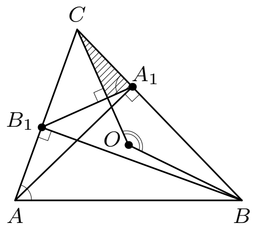


Рис. 477

2.645⁰. Пусть $AC > AB$, M и N — точки пересечения с окружностью лучей AH и AO (рис. 476). Тогда $MN \parallel CB$. Поэтому $\smile CN = \smile BM$. Следовательно,

$$\angle BAH = \angle BAM = \angle NAC = \angle OAC.$$

2.646. Пусть треугольник ABC остроугольный и $\angle CAB = \alpha$ (рис. 477). Тогда $\angle CA_1B_1 = \alpha$ (см. задачу **2.613⁰**), $\angle COB = 2\alpha$, $\angle OCB = 90° - \alpha$. Поэтому $\angle OCB + \angle B_1A_1C = \alpha + 90° - \alpha = 90°$. Для тупоугольного треугольника доказательство аналогично.

2.647. 22. *Указание.* Вершины A, B и D лежат на окружности с центром C.

2.648. 1. ▌ Обозначим $\angle CBD = \alpha$ (рис. 478). Имеем $\angle CAD = \alpha$, $\angle BEC = 90° - \alpha$, $\angle DBE = \alpha$. Следовательно, $BE = BC$. Обозначим $\angle ACB = \beta$. Аналогично докажем, что $\angle ACF = \beta$. Поэтому $CF = BC$. Значит, $BE = CF$, а так как $BE \parallel CF$ (перпендикуляры к одной и той же прямой AD), то $BCFE$ — параллелограмм (даже ромб). Следовательно, $EF = BC = 1$.

2.649. Поскольку AD — диаметр окружности, $\angle ACD = 90°$ (рис. 479). Поэтому отрезок DM виден из точек C и P под

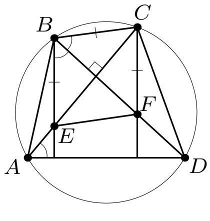


Рис. 478

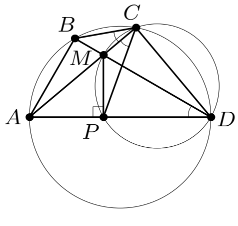


Рис. 479

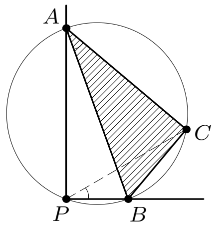


Рис. 480

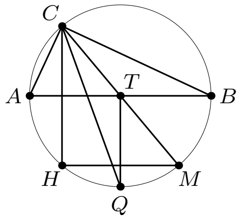


Рис. 481

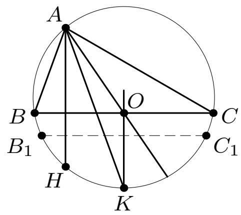


Рис. 482

прямым углом. Значит, точки C и P лежат на окружности с диаметром DM. Следовательно,

$$\angle MCP = \angle MDP = \angle BDA = \angle BCA = \angle BCM,$$

т. е. CA — биссектриса угла BCP треугольника BCP. Аналогично докажем, что BM — биссектриса угла CBP треугольника BCP.

2.650. Отрезок. *Указание.* Пусть вершины A и B треугольника ABC с прямым углом C скользят по сторонам прямого угла с вершиной P (рис. 480). Тогда точки P и C лежат на окружности с диаметром AB.

2.651$^{\mathbf{0}}$. Пусть T — середина AB (рис. 481). Опишем окружность около треугольника ABC. Продолжения высоты, биссектрисы и медианы пересекают эту окружность в точках H, Q и M соответственно.

Необходимость. Поскольку дуги AH и MB равны, то $HM \parallel AB$. Поэтому $\angle CHM = 90^\circ$ и CM — диаметр окружности. Поскольку точки Q и T равноудалены от концов отрезка AB, то QT — серединный перпендикуляр к стороне AB, поэтому T — центр окружности. Следовательно, AB — также диаметр, и $\angle ACB = 90^\circ$.

Достаточность. Пусть угол C прямой. Тогда CM — диаметр, угол CHM прямой. Поэтому $HM \parallel AB$. Отсюда следует, что $\smile AH = \smile MB$ и $\angle ACH = \angle MCB$. Поэтому $\angle HCQ = \angle MCQ$.

2.652. *Указание.* Пусть H и K — точки пересечения с описанной окружностью треугольника ABC продолжений его высоты и биссектрисы, проведенных из вершины A (рис. 482).

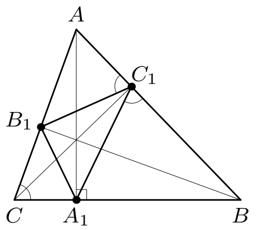


Рис. 483

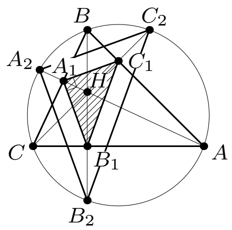


Рис. 484

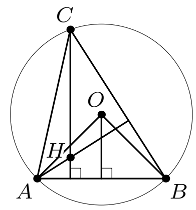


Рис. 485

Тогда K — середина любой дуги B_1C_1, где $B_1C_1 \parallel BC$, а прямая, проходящая через точку K и середину BC, параллельна AH.

2.653. Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC, проведенных из вершин A, B и C соответственно (рис. 483). Тогда $\angle AC_1B_1 = \angle ACB$ и $\angle BC_1A_1 = \angle ACB$ (см. задачу $\mathbf{2.548^0}$). Поэтому $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1$. Следовательно, $\angle B_1C_1C = \angle A_1C_1C$.

2.654. 10. ▮ Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты данного остроугольного треугольника ABC, H — его ортоцентр (рис. 484). Продолжим высоты до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Тогда эти точки симметричны точке H относительно сторон треугольника ABC, поэтому стороны треугольника $A_2B_2C_2$ вдвое больше соответствующих сторон треугольника $A_1B_1C_1$ (B_1C_1 — средняя линия треугольника B_2HC_2 и т. д.) и соответственно параллельны им, значит, треугольник $A_2B_2C_2$ также прямоугольный и его гипотенуза равна 20. Следовательно, радиус окружности, на которой лежат точки A_2, B_2, C_2 и A, B, C, равен 10.

2.655. 45° или 135°. *Указание.* Расстояние от точки H пересечения высот треугольника ABC до вершины C вдвое больше расстояния от центра O описанной окружности до стороны AB (рис. 485) (см. задачу $\mathbf{2.108^0}$).

2.656. 60° или 120°. *Указание.* Расстояние от точки пересечения высот треугольника ABC до вершины C вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до стороны AB (см. задачу $\mathbf{2.108^0}$).

2.657. Пусть O — центр окружности (рис. 486). Тогда $OM \perp KL$. Отрезок OA виден из точек M, P и Q под

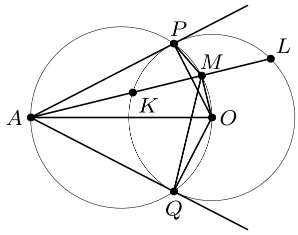


Рис. 486

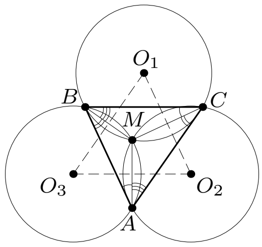


Рис. 487

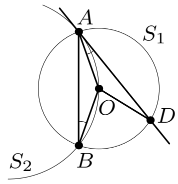


Рис. 488

прямым углом. Поэтому точки O, M, P, A и Q лежат на одной окружности. Поскольку $AP = AQ$, то $\angle AMP = \angle AMQ$.

2.658⁰. *Указание.* Пусть R — радиус каждой из данных окружностей (рис. 487). Точка M — центр окружности, проходящей через центры трех данных окружностей; радиус этой окружности также равен R; треугольник ABC равен треугольнику с вершинами в центрах данных окружностей. Углы MAB и MCB равны, так как они вписаны в равные окружности и опираются на равные дуги этих окружностей. Аналогично,

$$\angle MBA = \angle MCA \quad \text{и} \quad \angle MAC = \angle MBC.$$

2.659. Треугольники AOB и AOD (рис. 488) равны, поскольку оба они равнобедренные (OA, OB и OD — радиусы одной окружности), а $\angle ABO = \angle DAO$ по теореме об угле между касательной и хордой. Следовательно, $AD = AB$.

2.660. *Указание.* $\angle ABC = \angle BAP = \angle ADC$ (рис. 489).

2.661. $|a - b|$. *Указание.* $\angle APK = \angle AMC = \angle CBA$ (рис. 490); треугольники CKP и CKB равны.

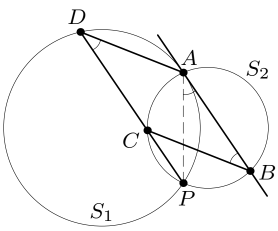


Рис. 489

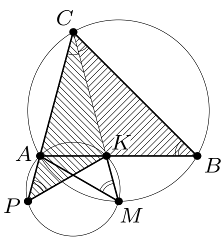


Рис. 490

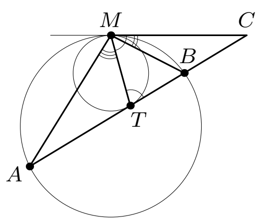


Рис. 491

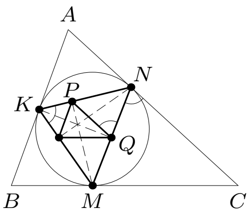


Рис. 492

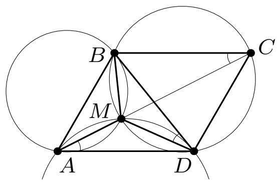


Рис. 493

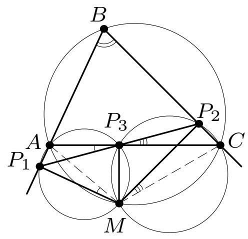


Рис. 494

2.662. Пусть луч AB пересекает общую касательную MC к данным окружностям в точке C (B между A и C). Обозначим $\angle CMT = \varphi$, $\angle CMB = \alpha$, $\angle AMT = \gamma$ (рис. 491). Тогда

$$\angle CTM = \varphi, \qquad \angle MTB = \alpha + \gamma = \varphi$$

(внешний угол треугольника AMT). Следовательно, $\angle TMB = \varphi - \alpha = \gamma$.

2.663. Пусть M, N и K — точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно; MP и KQ — высоты треугольника MNK (рис. 492). Тогда $\angle MNC = \angle MKN = \angle PQN$ (см. задачу **2.613⁰**). Следовательно, $PQ \parallel AC$.

2.664. *Указание.* $\angle BDM = \angle BCM = \angle MAD$ (рис. 493).

2.665. Пусть M — точка описанной окружности треугольника ABC, лежащая на дуге AC, не содержащей точки B; P_1, P_2, P_3 — основания перпендикуляров, опущенных из точки M на прямые AB, BC, AC соответственно (рис. 494). Точки A, P_1, M и P_3 лежат на окружности с диаметром AM. Поэтому $\angle P_1P_3A = \angle P_1MA$. Точки C, P_2, P_3 и M лежат на окружности с диаметром MC. Поэтому $\angle P_2MC = \angle P_2P_3C$. Каждый из углов P_1MP_2 и AMC дополняет угол ABC до 180°. Поэтому $\angle P_1MP_2 = \angle AMC$. Тогда $\angle P_1MA = \angle P_2MC$. Следовательно, $\angle P_1P_3A = \angle P_2P_3C$, т. е. точки P_1, P_3 и P_2 лежат на одной прямой.

2.666. Пусть D — точка пересечения прямой AM с окружностью S_2 (рис. 495). По теореме об угле между касательной и хордой

$$\angle BAD = \angle BAM = \angle MCA = \angle CDA.$$

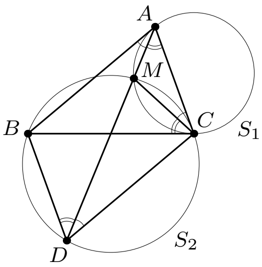


Рис. 495

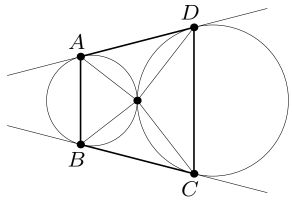


Рис. 496

Поэтому $CD \parallel AB$. С другой стороны,

$$\angle DAC = \angle MAC = \angle MCB = \angle BDM = \angle BDA.$$

Поэтому $BD \parallel AC$. Следовательно, $ABDC$ — параллелограмм. Его диагональ AD делит вторую диагональ BC пополам.

2.667. *Указание.* Биссектрисы углов A и B четырехугольника $ABCD$ пересекаются в середине дуги AB, а биссектрисы углов D и C — в середине дуги CD (рис. 496).

9 класс

§ 3.1

3.1. 7,5. **3.2.** 8, 8, 8. **3.3.** 12 или $3\sqrt{2}$. **3.4.** $3\sqrt{6} : 8$. **3.5.** 12, 6. **3.6.** $\frac{ac+bd}{a}$. **3.7⁰.** $R^2 - d^2$. **3.8⁰.** $d^2 - R^2$.

3.9. 0,2. ▮ Точка B расположена между точками A и C (рис. 497). Предположим, что точка D расположена между точками A и E. Тогда $AB \cdot AC = AD \cdot AE$, или $14 \cdot 7 = 10 \cdot (10 + DE)$ (см. задачу **3.8⁰**). Отсюда находим, что $DE = -0{,}2$, что невозможно. Поэтому точка E расположена между A и D. Тогда $AB \cdot AC = AD \cdot AE$, или $14 \cdot 7 = 10 \cdot (10 - DE)$. Отсюда находим, что $DE = 0{,}2$.

3.10. 6.

3.11. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. ▮ Пусть PE — искомая хорда, M — точка касания окружности со стороной AD (рис. 498). Тогда

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad AM = \frac{a}{2}.$$

По теореме о касательной и секущей

$$AM^2 = AE \cdot AP, \quad \text{или} \quad \frac{a^2}{4} = a\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot a\frac{\sqrt{5}}{2} - PE.$$

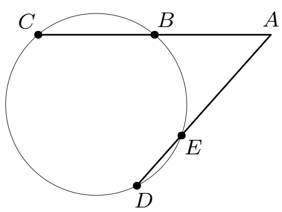


Рис. 497

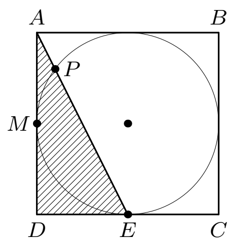


Рис. 498

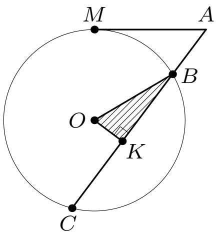


Рис. 499

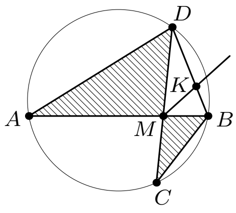


Рис. 500

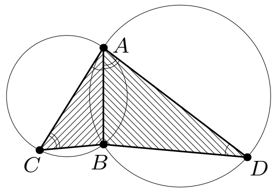


Рис. 501

Из этого уравнения находим, что $PE = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

3.12. $\frac{2ar}{\sqrt{r^2+a^2}}$.

3.13. 13. ▮ Пусть секущая пересекает окружность в точках B и C, а M — точка касания (рис. 499). Тогда $AM = 16$, $AC = 32$, $BC = 32 - BA$. По теореме о касательной и секущей $AM^2 = AC \cdot AB$, или $16^2 = 32(32 - BC)$. Отсюда находим, что $BC = 24$. Пусть K — проекция центра O данной окружности на хорду BC. Из прямоугольного треугольника OKB по теореме Пифагора находим, что

$$R = OB = \sqrt{OK^2 + BK^2} = \sqrt{25 + 144} = 13.$$

3.17. 1, 2. ▮ Треугольники BMC и DMA (рис. 500) подобны ($\angle MCB = \angle DCB = \angle DAB = \angle DAM$). Поскольку площади этих треугольников относятся как $1:4$, то коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$, и $DM = 2BM$. Так как MK — биссектриса треугольника BMD, то $\frac{DK}{KB} = \frac{DM}{BM} = 2$. Следовательно,

$$DK = 2 \cdot \frac{1}{3}BD = 2, \qquad BK = \frac{1}{3}BD = 1.$$

3.18⁰. $\sqrt{ab}$. ▮ По теореме об угле между касательной и хордой $\angle BAC = \angle BDA$ и $\angle BAD = \angle BCA$ (рис. 501), поэтому треугольники ABC и DBA подобны по двум углам. Следовательно, $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$, откуда находим, что $AB^2 = BC \cdot BD = ab$.

3.19. 4.

3.20⁰. Пусть A и B — точки пересечения окружностей (рис. 502), MN — общая касательная (M и N — точки касания), K — точка пересечения прямых AB и MN (A между K

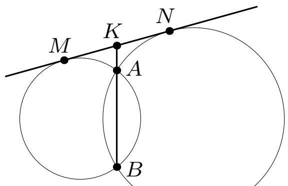


Рис. 502

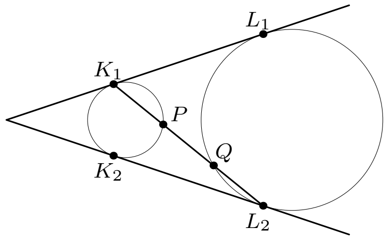


Рис. 503

и B). Тогда $MK^2 = KB \cdot KA$ и $NK^2 = KB \cdot KA$. Следовательно, $MK = NK$.

3.21. Пусть P и Q — точки пересечения прямой K_1L_2 соответственно с первой и второй окружностями, отличные от точек K_1 и L_2 (рис. 503). По теореме о касательной и секущей

$$K_1Q \cdot K_1L_2 = K_1L_1^2 \quad \text{и} \quad L_2P \cdot K_1L_2 = K_2L_2^2.$$

Поскольку $K_2L_2 = K_1L_1$, то $K_1Q = L_2P$. Следовательно, $K_1P = L_2Q$.

3.22. 2. ▮ Поскольку $\angle KBC = \angle DBC = \angle DAC = \angle BAC$ (рис. 504), то треугольник KBC подобен треугольнику BAC (по двум углам). Поэтому $KC : BC = BC : AC$. Пусть $KC = x$. Тогда $\frac{x}{4} = \frac{4}{x+6}$. Из этого уравнения находим, что $x = 2$.

3.23. $\sqrt{2}$. ▮ Пусть M — середина BC (рис. 505). Поскольку $\angle ADC = \angle ABC = \angle CBD$, то треугольник DCM подобен треугольнику BCD (по двум углам). Следовательно, $\frac{DC}{BC} = \frac{CM}{DC}$. Обозначим $BM = CM = x$. Тогда $\frac{1}{2x} = \frac{x}{1}$. Отсюда находим, что $x^2 = \frac{1}{2}$. Следовательно, $BC = 2x = \sqrt{2}$.

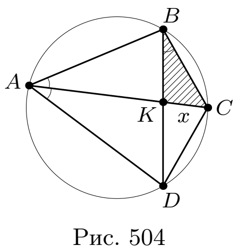


Рис. 504

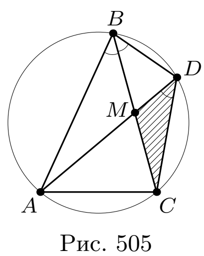


Рис. 505

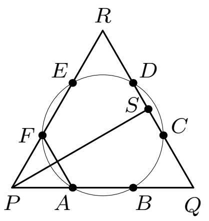


Рис. 506

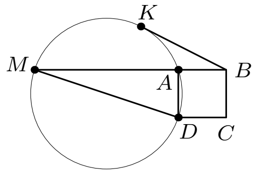


Рис. 507

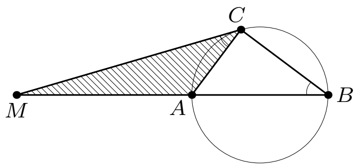


Рис. 508

3.24. *Первый способ.* Пусть A и B, C и D, E и F — точки пересечения окружности со сторонами PQ, QR, RP треугольника PQR (рис. 506). Рассмотрим медиану PS. Она проходит через середины параллельных хорд FA и DC и поэтому перпендикулярна им. Следовательно, PS является высотой треугольника PQR, а значит, $PQ = PR$. Аналогично, $PQ = QR$.

Второй способ. Пусть A и B, C и D, E и F — точки пересечения окружности со сторонами PQ, QR и RP треугольника QPR (см. рис. 506). Рассмотрим секущие PB и PE. Поскольку

$$PA \cdot PB = PF \cdot PE, \qquad PA = \frac{1}{3}PQ, \qquad PF = \frac{1}{3}PR,$$

то $\frac{2}{9}PQ^2 = \frac{2}{9}PR^2$. Следовательно, $PQ = PR$. Аналогично, $PQ = QR$.

3.25. $\sqrt{10}$. ▮ Пусть AD — хорда окружности, луч BA пересекает окружность в точке M, отличной от A (рис. 507). Тогда $BM \cdot AB = BK^2$. Отсюда находим, что $AM = 3$. Поскольку $\angle DAM = 90°$, то DM — диаметр окружности. Следовательно, $DM^2 = AD^2 + AM^2 = 1 + 9 = 10$.

3.26. $\frac{120}{7}$. ▮ Пусть $AB = 10$, $BC = 8$ и $AC = 6$ — стороны данного треугольника ABC (рис. 508). Поскольку $AB^2 = BC^2 + AC^2$, треугольник ABC прямоугольный, причем $\angle ACB = 90°$, поэтому AB — диаметр окружности, описанной около треугольника ABC. Если касательная, проведенная к окружности через точку C (вершина наибольшего угла), пересекает продолжение наибольшей стороны AB в точке M, то по теореме о касательной и секущей $MC^2 = MA \cdot MB$. Обозначим $MA = x$. Тогда $MC^2 = x(x + 10)$. С другой стороны, из подобия треугольников AMC и CMB следует, что $\frac{AC}{BC} = \frac{MA}{MC}$,

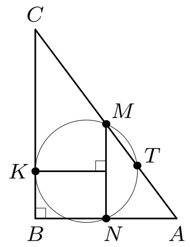


Рис. 509

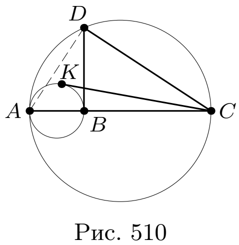


Рис. 510

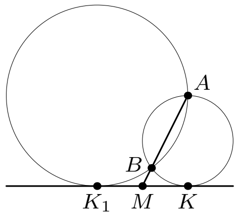


Рис. 511

откуда $MC = MA \cdot \frac{BC}{AC} = x \cdot \frac{8}{6} = \frac{4x}{3}$. Из уравнения $\frac{16}{9}x^2 = x(x+10)$ находим, что $x = \frac{90}{7}$. Следовательно,

$$MC = \sqrt{x(x+10)} = \sqrt{\frac{90}{7}\Big(\frac{90}{7}+10\Big)} = \frac{120}{7}.$$

3.27. 1,1. ▮ Пусть M и N — середины AC и AB соответственно, K — точка касания (рис. 509). Тогда $MN = \frac{1}{2}BC = 2$, $CK = CB - KB = CB - \frac{1}{2}MN = 4 - 1 = 3$. Пусть T — вторая точка пересечения окружности с гипотенузой AC. Тогда

$$CT \cdot CM = CK^2, \quad \text{или} \quad \Big(\frac{5}{2} + MT\Big) \cdot \frac{5}{2} = 9.$$

Отсюда находим, что $MT = 1{,}1$.

3.28. В прямоугольном треугольнике ADC (рис. 510) отрезок BD — высота, проведенная из вершины прямого угла. Поэтому $DC^2 = BC \cdot AC$. С другой стороны, по теореме о касательной и секущей $CK^2 = BC \cdot AC$. Следовательно, $CD = CK$.

3.29⁰. Пусть A и B — данные точки (рис. 511), M — точка пересечения прямой AB с данной прямой, K — искомая точка касания. По теореме о касательной и секущей $MK = \sqrt{MB \cdot MA}$.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Строим отрезок, равный среднему геометрическому известных отрезков MB и MA, и откладываем его по разные стороны от точки M на данной прямой. Остается построить окружности, проходящие через точки A, B и каждую из построенных точек.

Если точки A и B расположены по одну сторону от данной прямой и удалены от нее на разные расстояния, то задача

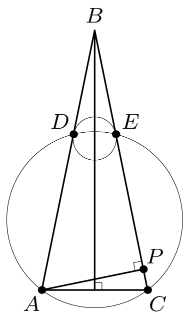


Рис. 512

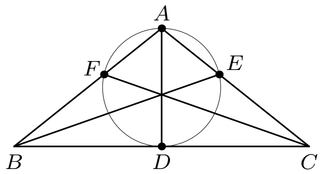


Рис. 513

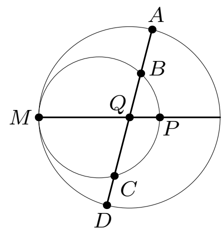


Рис. 514

имеет два решения, если на равные — одно решение. В остальных случаях решений нет.

3.30. $\frac{4\sqrt{6}}{5}$. ▮ Из теоремы о касательной и секущей следует, что $BA \cdot BD = BE \cdot BC$ (рис. 512). Поскольку $BD = BE$, то $AB = BC$, т. е. треугольник ABC равнобедренный. Пусть h — высота треугольника ABC, опущенная из вершины B. Тогда

$$h = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{1}{2}AC\right)^2} = \sqrt{25 - 1} = 2\sqrt{6}.$$

Если AP — искомая высота треугольника ABC, то $AC \cdot h = BC \cdot AP$. Следовательно,

$$AP = AC \cdot \frac{h}{BC} = 2 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{5}.$$

3.31. $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$. ▮ Пусть $BC = x$ (рис. 513). По свойству биссектрисы треугольника $CE : AE = BC : AB = x : 1$. Отсюда находим, что $CE = \frac{x}{1+x}$. Поскольку $CD^2 = CE \cdot AC$, то $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x}{1+x}$. Из этого уравнения находим, что $x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$.

3.32. $\frac{3}{2}$. ▮ Пусть M — точка касания окружностей (рис. 514), r и R $(r < R)$ — их радиусы, Q — центр большей из окружностей. Обозначим: $AB = 3x$, $BC = 7x$, $CD = 2x$. Тогда

$$R = \frac{AB + BC + CD}{2} = 6x, \quad BQ = AQ - AB = R - 3x = 3x,$$

$$QC = R - 2x = 4x, \quad MQ = R = 6x, \quad QP = 2r - MQ = 2r - 6x$$

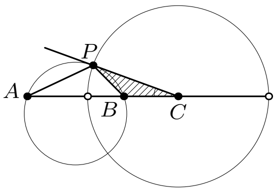


Рис. 515

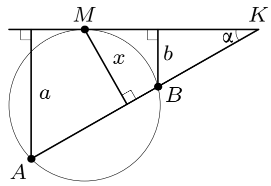


Рис. 516

(где MP — диаметр меньшей окружности). По теореме об отрезках пересекающихся хорд

$$BQ \cdot QC = MQ \cdot QP, \quad \text{или} \quad 3x \cdot 4x = 6x \cdot (2r - 6x).$$

Из этого уравнения находим, что $r = 4x$. Следовательно, $\frac{R}{r} = \frac{6x}{4x} = \frac{3}{2}$.

3.33. Окружность без двух точек. ▮ Если M — одна из точек касания, то $CM^2 = CA \cdot CB$. Следовательно, точка M лежит на окружности с центром C и радиусом, равным $\sqrt{CA \cdot CB}$.

Рассмотрим теперь любую точку P этой окружности, не лежащую на прямой AC (рис. 515). Опишем окружность около треугольника APB. Тогда треугольники APC и PBC подобны, так как угол C у них общий, и $\frac{AC}{PC} = \frac{PC}{BC}$, так как $PC = \sqrt{AC \cdot BC}$. Поэтому $\angle CPB = \angle PAC = \angle PAB$.

Если касательная, проведенная к описанной окружности треугольника APB в точке P, пересекает луч BC в точке C_1, то $\angle C_1PB = \angle PAB = \angle CPB$. Поэтому точки C_1 и C совпадают. Следовательно, CP — касательная к окружности, проходящей через точки A и B.

3.34. $\sqrt{ab}$. ▮ Обозначим через K точку пересечения прямой AB с указанной касательной, α — угол между ними, x — искомый отрезок (рис. 516). Тогда $\sin\alpha = \frac{b}{BK} = \frac{x}{MK} = \frac{a}{AK}$. Поэтому $\frac{ab}{AK \cdot BK} = \frac{x^2}{MK^2}$. Поскольку $AK \cdot BK = MK^2$, то $x^2 = ab$.

3.35. 1,6. ▮ Проведем из точки A касательную к данной окружности (рис. 517). Пусть M — точка касания, O — центр окружности. Из прямоугольного треугольника OMA находим, что $AM^2 = AO^2 - OM^2 = 25 - 9 = 16$.

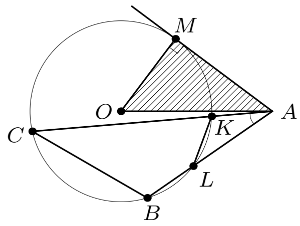


Рис. 517

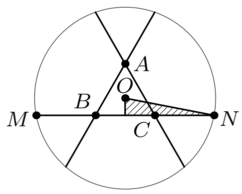


Рис. 518

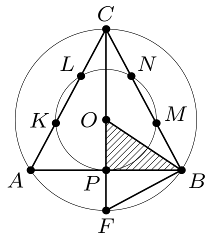


Рис. 519

Тогда $AK \cdot AC = AL \cdot AB = AM^2 = 16$. Поэтому

$$S_{AKL} = \frac{1}{2} AK \cdot AL \sin 30^\circ = \frac{1}{4} AK \cdot AL = \\ = \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{AC} \cdot \frac{16}{AB} = \frac{64}{AC \cdot AB} = \frac{16}{S_{ABC}} = \frac{16}{10} = 1{,}6.$$

3.36. $\frac{a\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$. ▮ Из теоремы о произведениях отрезков пересекающихся хорд следует, что все три хорды равны между собой. Поэтому точки пересечения хорд — вершины правильного треугольника со стороной $\frac{a}{3}$ (рис. 518). Центр этого треугольника совпадает с центром данной окружности. Расстояние от него до каждой хорды равно $\frac{a\sqrt{3}}{18}$. Поэтому квадрат искомого радиуса равен

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{18}\right)^2 = \frac{7a^2}{27}.$$

3.37. $\frac{5}{9}$. ▮ Пусть меньшая окружность с центром O касается стороны AB треугольника ABC в точке P, пересекает сторону BC в точках M и N, а сторону AC — в точках K и L, и $BM = MN = NC = a$, $AK = KL = LC = b$ (рис. 519).

Поскольку $CM \cdot CN = CK \cdot CL$, то $a = b$, а так как $PB^2 = BN \cdot BM$, то $PB = AP = a\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника CPB находим, что $CP = a\sqrt{7}$.

Пусть CF — диаметр большей окружности, R — радиус. Тогда $CP \cdot CF = BC^2$, или $a\sqrt{7} \cdot 2R = 9a^2$, откуда $R = \frac{9a}{2\sqrt{7}}$. Тогда радиус r меньшей окружности находим из прямоугольного треугольника OPB:

$$r = \sqrt{R^2 - 2a^2} = \frac{5a}{2\sqrt{7}}.$$

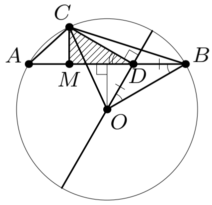


Рис. 520

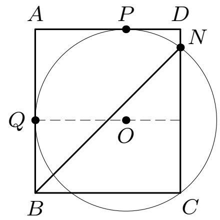


Рис. 521

Следовательно, $\frac{r}{R} = \frac{5}{9}$.

3.38. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. ▌ Пусть O — центр окружности, R — ее радиус (рис. 520). Тогда

$$R = \frac{AB/2}{\cos\angle OBA} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Поскольку $(R - OD)(R + OD) = AD \cdot DB$, то

$$OD^2 = R^2 - AD \cdot DB = 3 - 1 \cdot 2 = 1.$$

Поэтому $OD = 1$. Следовательно, треугольник ODC — прямоугольный ($OC^2 = OD^2 + CD^2$) и $\angle CDO = 90°$. Тогда

$$\angle CDA = \angle CDO - \angle ADO = \\ = 90° - (\angle DBO + \angle DOB) = 90° - 60° = 30°.$$

Пусть CM — высота треугольника ACB. Тогда $CM = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $S_{ABC} = AB \cdot \frac{1}{2}CM = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

3.39. 40. ▌ Пусть $DN = x$, P, Q — точки касания окружности со сторонами AD и AB (рис. 521). По теореме о касательной и секущей $PD = 3\sqrt{x}$. Тогда

$$AP = 8 - 3\sqrt{x} = AQ, \qquad QB = 9 - AQ = 1 + 3\sqrt{x}, \\ NC = 2QB = 2 + 6\sqrt{x}.$$

Поскольку $NC + ND = 9$, то

$$2 + 6\sqrt{x} + x = 9, \quad \text{или} \quad x + 6\sqrt{x} - 7 = 0.$$

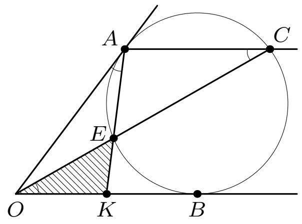


Рис. 522

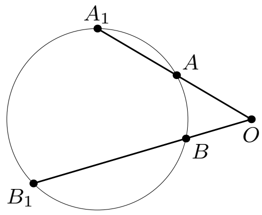


Рис. 523

Отсюда находим, что $x = 1$. Следовательно,

$$S_{ABND} = (AB + ND) \cdot \frac{1}{2} AD = 10 \cdot 4 = 40.$$

3.40. Треугольники KOA и KEO (рис. 522) подобны по двум углам ($\angle EOK = \angle ACE = \angle OAK$). Поэтому $\frac{KE}{OK} = \frac{OK}{AK}$. Отсюда следует, что $OK^2 = EK \cdot AK$. С другой стороны, по теореме о касательной и секущей $EK \cdot AK = KB^2$. Следовательно, $OK = KB$.

3.41⁰. Проведем окружность через точки A, B и B_1 (рис. 523). Если A_2 — точка пересечения прямой OA с окружностью, отличная от A, то $OA_2 \cdot OA = OB_1 \cdot OB$. Следовательно, точки A_1 и A_2 совпадают.

3.42. Пусть окружности пересекаются в точках A и B. По теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд $LP \cdot PN = AP \cdot BP$ и $MP \cdot PK = AP \cdot BP$ (рис. 524). Поэтому $LP \cdot PN = MP \cdot PK$. Следовательно, точки L, M, N и K лежат на одной окружности.

3.43⁰. Предположим, что C_1 — вторая точка пересечения прямой MC с данной окружностью (рис. 525). Из теоремы

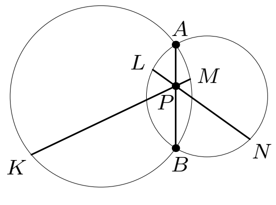


Рис. 524

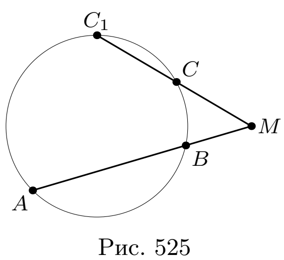


Рис. 525

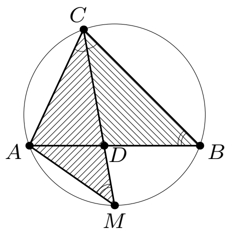


Рис. 526

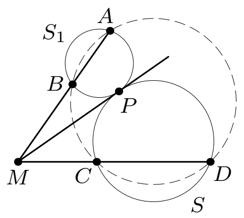


Рис. 527

о касательной и секущей следует, что

$$MC \cdot MC_1 = MA \cdot MB, \quad \text{или} \quad MC \cdot (MC \pm CC_1) = MC^2.$$

Поэтому точки C и C_1 совпадают.

3.44⁰. Пусть M — точка пересечения продолжения биссектрисы CD треугольника ABC с описанной около этого треугольника окружностью (рис. 526). Тогда треугольник CBD подобен треугольнику CMA (по двум углам). Поэтому

$$\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{CM},$$

или

$$CD \cdot (CD + DM) = AC \cdot BC, \qquad CD^2 + CD \cdot DM = AC \cdot BC.$$

Следовательно,

$$CD^2 = AC \cdot BC - CD \cdot DM = AC \cdot BC - AD \cdot BD$$

($CD \cdot DM = AD \cdot DB$ по теореме об отрезках пересекающихся хорд).

3.45. Предположим, что искомая окружность S_1 построена (рис. 527). Пусть P — точка касания двух окружностей, а M — точка, в которой прямая AB пересекается с общей касательной к двум окружностям, проведенной через точку P.

Проведем через точку M прямую, пересекающую окружность S в двух точках C и D. Тогда $MD \cdot MC = MP^2 = MA \cdot MB$. Следовательно, точки A, B, C и D лежат на одной окружности (см. задачу **3.41⁰**).

Отсюда вытекает следующий способ построения. Пусть центр данной окружности S не лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB (иначе построение очевидно). Возьмем на окружности S произвольную точку C и опишем окружность около треугольника ABC.

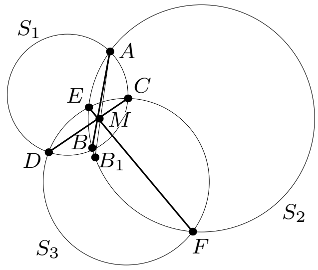


Рис. 528

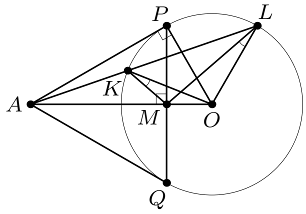


Рис. 529

Пусть D — вторая точка пересечения построенной окружности с окружностью S, M — точка пересечения прямых CD и AB. Проведем из точки M касательные MP и MQ к окружности S (P и Q — точки касания). Тогда описанные окружности треугольников ABP и ABQ — искомые, поскольку $MP^2 = MQ^2 = MA \cdot MB$ (см. задачу **3.43⁰**).

3.46⁰. Пусть окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B (рис. 528), окружности S_1 и S_3 — в точках C и D, окружности S_2 и S_3 — в точках E и F. Если M — точка пересечения отрезков CD и EF, то по теореме об отрезках пересекающихся хорд $CM \cdot MD = EM \cdot MF$. Через точки A и M проведем прямую, вторично пересекающую окружность S_2 а точке B_1. Тогда хорды AB_1 и EF окружности S_2 пересекаются в точке M, поэтому $AM \cdot MB_1 = EM \cdot MF = CM \cdot MD$. Значит точки A, B_1, C и D лежат на одной окружности, а так как через точки A, C и D проходит единственная окружность S_1, то точка B_1 лежит на окружности S_1. Таким образом, точка B_1 является общей точкой окружностей S_1 и S_2, отличной от точки A. Значит, точка B_1 совпадает с точкой B. Следовательно, хорда AB проходит через точку пересечения хорд CD и EF.

3.47. В прямоугольном треугольнике APO (рис. 529) отрезок AM — проекция катета AP на гипотенузу AO, поэтому $AO \cdot AM = AP^2$. С другой стороны, по теореме о касательной и секущей $AK \cdot AL = AP^2$. Значит, $AO \cdot AM = AK \cdot AL$, следовательно, точки L, K, M, O расположены на одной окружности. Вписанные в эту окружность углы MKO и MLO опираются на одну дугу, поэтому они равны.

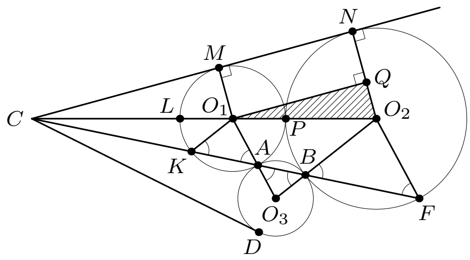


Рис. 530

3.48. $\frac{2rR}{R-r}$. ▮ Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов r и R соответственно, O_3 — центр третьей окружности, K — вторая точка пересечения прямой AC с первой окружностью, P — точка касания двух первых окружностей (рис. 530).

Поскольку эти окружности касаются, то точка P лежит на прямой O_1O_2. Докажем, что точка пересечения прямых MN и AB также лежит на прямой O_1O_2.

Пусть прямая MN пересекает прямую O_1O_2 в точке C'. Если Q — проекция точки O_1 на O_2N, то треугольник O_1MC' подобен треугольнику O_2QO_1 с коэффициентом

$$\frac{O_1M}{O_2Q} = \frac{O_1M}{O_2N - NQ} = \frac{O_1M}{O_2N - O_1M} = \frac{r}{R-r}.$$

Поэтому

$$C'O_1 = \frac{r}{R-r} \cdot O_1O_2 = \frac{r}{R-r}(R+r) = \frac{r(R+r)}{R-r}.$$

Пусть прямая AB пересекает прямую O_1O_2 в точке C''. Поскольку точка A лежит на отрезке O_1O_3, а точка B — на O_2O_3, $\angle O_1KA = \angle O_1AK = \angle O_3AB = \angle O_3BA = \angle O_2BF$, где F — вторая точка пересечения прямой AB и окружности с центром O_2. Поэтому $KO_1 \parallel BO_2$. Пусть прямая, проходящая через точку O_1 параллельно AB, пересекает радиус O_2B в точке L. Тогда треугольник O_1KC'' подобен треугольнику O_2LO_1 с коэффициентом

$$\frac{O_1K}{O_2L} = \frac{O_1K}{O_2B - BL} = \frac{O_1K}{O_2B - O_1K} = \frac{r}{R-r}.$$

Поэтому

$$C''O_1 = \frac{r}{R-r} \cdot O_1O_2 = \frac{r}{R-r}(R+r) = \frac{r(R+r)}{R-r}.$$

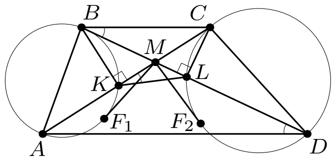


Рис. 531

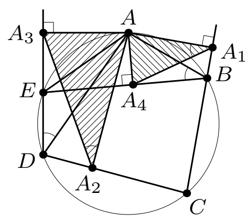


Рис. 532

Таким образом, $C'O_1 = C''O_1$. Значит, точки C' и C'' совпадают. Следовательно, прямые MN и AB пересекаются на прямой O_1O_2.

Теперь найдем CD. Для этого сначала заметим, что точки A, P и B на сторонах треугольника $O_1O_2O_3$ таковы, что $O_1A = O_1P$, $O_2B = O_2P$, $O_3A = O_3B$. Значит, в этих точках вписанная окружность треугольника $O_1O_2O_3$ касается его сторон. Поскольку CP — касательная к этой окружности, CD — касательная к окружности с центром O_3, а CAB — общая секущая этих окружностей, $CD^2 = CA \cdot CB = CP^2$. Следовательно,

$$CD = CP = CO_1 + O_1P = \frac{r(R+r)}{R-r} + r = \frac{2rR}{R-r}.$$

3.49. Пусть AB и CD — боковые стороны трапеции $ABCD$ (рис. 531), M — точка пересечения диагоналей AC и BD, K — точка пересечения диагонали AC с окружностью, построенной на боковой стороне AB как на диаметре, а L — точка пересечения диагонали BD со второй окружностью. Тогда $\angle BKC = \angle BLC = 90^\circ$. Поэтому четырехугольник $BKLC$ вписанный. Следовательно, $\angle CKL = \angle CBL = \angle ADB$ и

$$\angle AKL = 180^\circ - \angle CKL = 180^\circ - \angle ADL.$$

Поэтому четырехугольник $AKLD$ также вписанный.

Пусть F_1 и F_2 — точки касания первой и второй окружностей с касательными, проведенными из точки M. Тогда $MF_1^2 = MK \cdot AM = ML \cdot MD = MF_2^2$. Следовательно, $MF_1 = MF_2$.

3.50. $\frac{ac}{b}$. ▮ Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые BC, DC, DE и BE соответственно (рис. 532). Докажем, что треугольник AA_1A_4

подобен треугольнику AA_2A_3. Действительно,

$$\angle A_1AA_4 = 180^\circ - \angle A_1BA_4 = \angle CBE = 180^\circ - \angle CDE = \angle A_2AA_3.$$

Точки A_1 и A_4 лежат на окружности с диаметром AB, а точки A_2 и A_3 — на окружности с диаметром AD. Поэтому $\angle AA_1A_4 = \angle ABE = \angle ADE = \angle AA_2A_3$. Из доказанного следует, что $\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{AA_4}{AA_3}$. Отсюда находим, что $AA_4 = AA_1 \cdot \frac{AA_3}{AA_2} = \frac{ac}{b}$.

3.51. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 533). Отложим от луча BA в полуплоскости, содержащей точку C, луч BP так, что $\angle ABP = \angle CBD$ (P — на AC). Треугольники ABP и DBC подобны по двум углам. Поэтому $\frac{AB}{AP} = \frac{BD}{CD}$, или $AB \cdot CD = AP \cdot BD$. Треугольники PBC и ABD также подобны по двум углам ($\angle ABD = \angle PBC$, $\angle BDA = \angle BCP$). Поэтому $\frac{BC}{PC} = \frac{BD}{AD}$, или $BC \cdot AD = PC \cdot BD$. Сложив почленно доказанные равенства, получим, что

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AP \cdot BD + BD \cdot PC = \\ = BD \cdot (AP + PC) = BD \cdot AC.$$

§ 3.2

3.52. Нет.

3.53. *Указание.* Примените теорему косинусов.

3.54. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$.

3.55. Обозначим указанные стороны через a и $2a$. Тогда по теореме косинусов квадрат третьей стороны равен

$$a^2 + 4a^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} = 3a^2.$$

Пусть α — угол данного треугольника, лежащий против стороны, равной $2a$. Тогда по теореме косинусов

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + 3a^2 - 4a^2}{2 \cdot a \cdot a\sqrt{3}} = 0.$$

Следовательно, $\alpha = 90^\circ$.

3.56. 2, $4\sqrt{3}$. *Указание.* Обозначьте стороны, образующие угол в 30°, через x и $2x\sqrt{3}$ и воспользуйтесь теоремой косинусов.

3.57. $\frac{3}{5}$.

3.58. $2\sqrt{19}$, $\sqrt{37}$. *Указание.* Рассмотрите треугольники ACD и BCD.

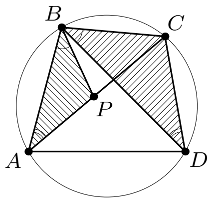


Рис. 533

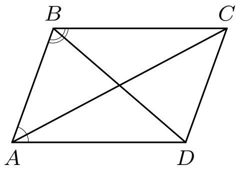


Рис. 534

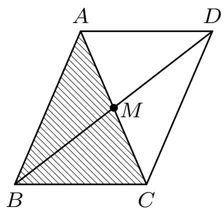


Рис. 535

3.59. 2 или 4. *Указание.* С помощью теоремы косинусов составьте уравнение относительно искомой стороны.

3.60. *Указание.* С помощью теоремы косинусов вычислите BC и CD.

3.61. $\frac{a\sqrt{13}}{3}$. *Указание.* Через вершину A проведите прямую, параллельную MN.

3.62⁰. Обозначим через α угол при вершине A параллелограмма $ABCD$ (рис. 534). По теореме косинусов из треугольников ABD и ABC находим, что

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\alpha$$

и

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = \\ = AB^2 + AD^2 + 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\alpha.$$

Тогда

$$BD^2 + AC^2 = (AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\alpha) + \\ + (AB^2 + AD^2 + 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\alpha) = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot AD^2.$$

3.63. $\sqrt{4a^2 + b^2}$. *Указание.* Примените теорему Пифагора и воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

3.64. $\sqrt{10}$. ▮ Обозначим через x основание BC равнобедренного треугольника ABC (рис. 535). На продолжении медианы BM за точку M отложим отрезок DM, равный BM. Тогда $BADC$ — параллелограмм. Поэтому

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2), \quad \text{или} \quad 36 + 16 = 2 \cdot 16 + 2x^2.$$

Отсюда находим, что $x^2 = 10$.

3.65. 6.

3.66⁰. $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$. ▮ Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$; медиана $CM=m$. На продолжении медианы CM за точку M отложим отрезок MD, равный CM. Тогда $ACBD$ — параллелограмм. Поэтому

$$CD^2+AB^2=2(AC^2+BC^2), \quad \text{или} \quad 4m^2+c^2=2(a^2+b^2).$$

Отсюда находим, что $m^2=\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)$.

3.67. 9,5.

3.68. 30. *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи **3.66⁰**.

3.69. *Указание.* Выразите квадрат каждой медианы по формуле, полученной в задаче **3.66⁰**, и сложите почленно три полученных равенства.

3.70. $\sqrt{\frac{299}{11}}$. ▮ Обозначим угол $\angle ABC=\alpha$ (рис. 536). Поскольку около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, то $\angle ADC = 180^\circ-\alpha$, поэтому

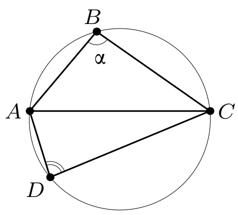


Рис. 536

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\alpha = AD^2+CD^2-2\cdot AD\cdot CD\cdot\cos(180^\circ-\alpha),$$

или

$$9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\cos\alpha=4+25+2\cdot2\cdot5\cdot\cos\alpha.$$

Из этого уравнения находим, что $\cos\alpha=-\frac{1}{11}$. Следовательно,

$$AC^2=9+16+2\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{11}=\frac{299}{11}.$$

3.71. Нельзя. ▮ Если бы около данного четырехугольника можно было описать окружность, то сумма его противолежащих углов была бы равна 180°. По теореме косинусов из треугольника ABC находим, что

$$\cos\angle B=\frac{9+16-36}{2\cdot3\cdot4}=-\frac{11}{24}\neq-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому $\angle B+\angle D\neq180^\circ$. Следовательно, около четырехугольника $ABCD$ нельзя описать окружность.

3.72. 6. ▮ Пусть BK — биссектриса угла при основании BC (рис. 537) равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC = 20$, $BC = 5$), M — середина BC. Из прямоугольного треугольника AMC находим, что $\cos\angle C = \frac{MC}{AC} = \frac{1}{8}$. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{1}$. Поэтому $KC = \frac{1}{5}AC = 4$.

По теореме косинусов из треугольника BKC находим, что

$$BK^2 = BC^2 + KC^2 - 2 \cdot BC \cdot KC \cdot \cos\angle C = 25 + 16 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} = 36.$$

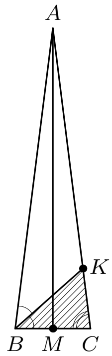


Рис. 537

3.73. $8\sqrt{2}$. *Указание.* По теореме косинусов из треугольника ABC найдите $\cos\angle B$, затем а из треугольника ABM — сторону AM.

3.74. 10. ▮ Пусть AK — биссектриса треугольника ABC (рис. 538). Тогда

$$\frac{CK}{KB} = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

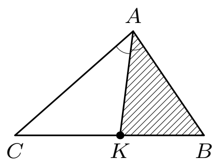


Рис. 538

Поэтому $BK = \frac{4}{9}BC = 8$. По теореме косинусов из треугольника ABC находим, что

$$\cos\angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{144 + 324 - 225}{2 \cdot 12 \cdot 18} = \frac{9}{16}.$$

Тогда из треугольника ABK находим, что

$$AK^2 = BK^2 + AB^2 - 2 \cdot BK \cdot AB \cdot \cos\angle B = 144 + 64 - 108 = 100.$$

3.75. $\frac{37}{40}$, $-\frac{37}{40}$, $-\frac{5}{16}$, $\frac{5}{16}$. *Указание.* Через конец C меньшего основания BC трапеции $ABCD$ проведите прямую, параллельную боковой стороне AB, и примените теорему косинусов к полученному треугольнику.

3.76. $4\sqrt{7}$, $2\sqrt{13}$, $2\sqrt{19}$. *Указание.* Пусть BD и CE — медианы треугольника ABC. Тогда $BM = \frac{2}{3}BD$, $CM = \frac{2}{3}CE$.

3.77. $\frac{5}{2\sqrt{7}}$. *Указание.* Пусть M и N — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Найдите стороны треугольника AMN.

3.78. $\sqrt{273}$. *Указание.* Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке K. Обозначьте $CK = x$ и с помощью теоремы косинусов составьте уравнение относительно x.

3.79. 120°. *Указание.* Через конец B меньшего основания BC трапеции $ABCD$ проведите прямую, параллельную диагонали AC. Далее примените теорему косинусов.

3.80. $\sqrt{a^2+b^2\pm ab}$. *Указание.* Середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

3.81. $\frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2\pm cd\sqrt{2}}$.

3.82. $\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$. *Указание.* Если биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке M, то $\angle BMC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ (см. задачу **1.116⁰**).

3.83. $2\sqrt{2} : 5$. ▮ Обозначим $BM = 2x$, $CM = 3x$, $AB = CD = y$ (рис. 539). Из треугольников ABM и CDM по теореме косинусов находим, что

$$AM^2 = 4x^2 + y^2 + 2xy\sqrt{2} \quad \text{и} \quad DM^2 = 9x^2 + y^2 - 3xy\sqrt{2}.$$

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника AMD находим, что $AM^2 + MD^2 = AD^2$, или

$$(4x^2 + y^2 + 2xy\sqrt{2}) + (9x^2 + y^2 - 3xy\sqrt{2}) = 25x^2,$$

или

$$12x^2 + xy\sqrt{2} - 2y^2 = 0,$$

откуда $\frac{y}{x} = 2\sqrt{2}$. Тогда $\frac{AB}{BC} = \frac{y}{5x} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

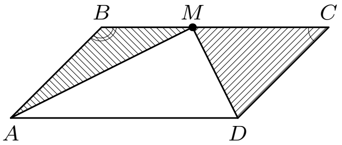


Рис. 539

3.84. $\sqrt{7}$. *Указание.* BD — высота треугольника ABC.

3.85. $2\sqrt{\frac{29}{5}}$. *Указание.* Пусть окружность, вписанная в данный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), касается катета AC в точке K. Тогда $AM = AK = AC - r$, где r — радиус окружности.

3.86. $a\sqrt{3}$. *Указание.* Докажите, что AKM, BLK и CML — равные прямоугольные треугольники.

3.87. $\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2kab}$. *Указание.* Треугольник ABC подобен треугольнику DBE с коэффициентом $|\cos\angle B|$ (см. задачу **2.548⁰**).

3.88. 4. ▮ Пусть $BD = x$ — искомая хорда (рис. 540). Поскольку BD — биссектриса угла ABC, то $AD = DC$. Выразив эти отрезки по теореме косинусов из треугольников ABD и CBD соответственно, получим уравнение

$$3 + x^2 - 2x\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 27 + x^2 - 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда $x = 4$.

3.89. $2\sqrt{6}$. ▮ По теореме косинусов из треугольника ABC (рис. 541) находим

$$\cos\angle C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{4 + 9 - 16}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4}.$$

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{2} = 2$. Поэтому $BK = 2$. Поскольку $\angle AMB = \angle CAM = \angle MAB$, то треугольник ABM равнобедренный, $BM = AB = 4$. Кроме того, $\angle KBM = \angle KCA = \angle C$. Следовательно,

$$KM^2 = BK^2 + BM^2 - 2 \cdot BK \cdot BM \cdot \cos\angle KBM =$$
$$= 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 24.$$

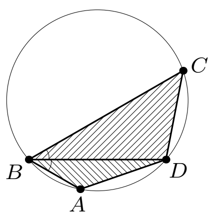


Рис. 540

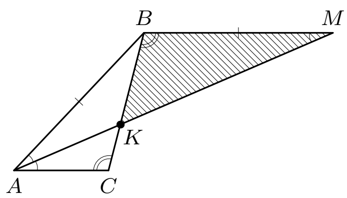


Рис. 541

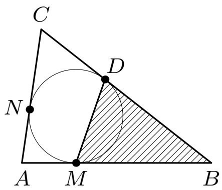


Рис. 542

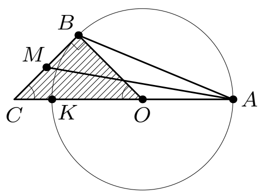


Рис. 543

3.90. $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. ▮ Обозначим $BM = BD = x$ (рис. 542). Тогда

$$AB = BM + AM = BM + AN = x + 2,$$
$$BC = BD + CD = BD + CN = x + 3.$$

По теореме косинусов

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \angle C,$$
$$(x + 2)^2 = 25 + (x + 3)^2 - 5(x + 3).$$

Из этого уравнения находим, что $x = 5$. Тогда $AB = 7$, $BC = 8$. Еще раз применяя теорему косинусов к треугольнику ABC, находим

$$\cos \angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{7^2 + 8^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{11}{14}.$$

Искомый отрезок MD находим по теореме косинусов из равнобедренного треугольника MBD:

$$MD = \sqrt{BM^2 + BD^2 - 2 \cdot BM \cdot BD \cdot \cos \angle B} = \sqrt{25 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{11}{14}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

3.91. $2\sqrt{9 + 6\sqrt{2}}$. ▮ Пусть O — центр окружности (рис. 543). Тогда $\angle BOC = 2\angle BAO = 45^\circ$. Из прямоугольного треугольника OBC находим, что $BC = 4$, $OC = 4\sqrt{2}$. Поэтому $AC = AO + OC = 4 + 4\sqrt{2}$. Медиану AM находим по теореме косинусов из треугольника AMC:

$$AM^2 = AC^2 + CM^2 - 2 \cdot AC \cdot CM \cdot \cos 45^\circ = (4 + 4\sqrt{2})^2 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot (4 + 4\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4(9 + 6\sqrt{2}).$$

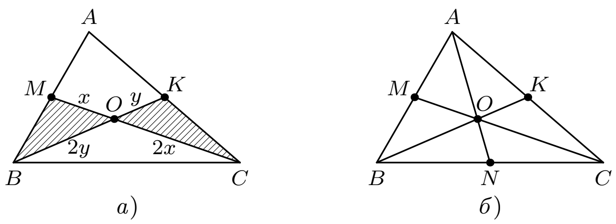


Рис. 544

3.92. *Первый способ.* Пусть BK и CM — медианы треугольника ABC, O — их точка пересечения и $AC > AB$ (рис. 544, *а*). Обозначим $OM = x$, $OK = y$. Тогда $OC = 2x$, $OB = 2y$. По теореме косинусов из треугольников MOB и KOC находим:

$$BM^2 = x^2 + 4y^2 - 4xy \cdot \cos \angle MOB,$$
$$CK^2 = 4x^2 + y^2 - 4xy \cdot \cos \angle KOC.$$

Поскольку $BM = \frac{1}{2}AB$, $KC = \frac{1}{2}AC$, то

$$BM^2 < KC^2, \quad \text{или} \quad x^2 + 4y^2 < 4x^2 + y^2 \quad (\angle MOB = \angle KOC).$$

Отсюда следует, что $x > y$. Поэтому $CM = 3x > 3y = BK$.

Второй способ. Пусть BK и CM — медианы треугольника ABC, O — их точка пересечения и $AC > AB$ (рис. 544, *б*). Проведем медиану AN. В треугольниках ANB и ANC сторона AN общая, $BN = CN$, а $AB < AC$, поэтому $\angle ANB < \angle ANC$. В треугольниках ONB и ONC сторона ON общая, $BN = CN$, а $\angle ONB < \angle ONC$, поэтому $OB < OC$. Следовательно, $BK = \frac{3}{2}OB < \frac{3}{2}OC = CM$.

3.93. $\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$, где p — полупериметр треугольника. *Указание.* Пусть AD — биссектриса треугольника ABC. Найдите BD, выразите косинус угла ABC по теореме косинусов из треугольников ABC и ABD и приравняйте полученные выражения. (Или воспользуйтесь формулой для биссектрисы треугольника (см. задачу **3.44⁰**): $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$.)

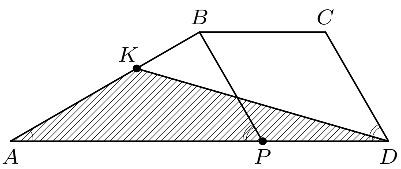


Рис. 545

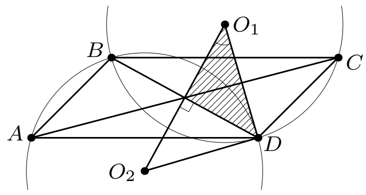


Рис. 546

3.94. 13. ▮ Поскольку $S_{ABD} = 3S_{BCD}$, то указанная прямая пересекает отрезок AB (рис. 545). Пусть K — точка пересечения. Тогда

$$S_{AKD} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (AD + BC)h = h\sqrt{39},$$

где h — высота трапеции $ABCD$. С другой стороны,

$$S_{AKD} = AD \cdot \frac{h_1}{2} = 3\sqrt{39} \cdot \frac{h_1}{2},$$

где h_1 — высота треугольника AKD. Поэтому

$$\frac{h_1}{h} = \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \frac{AK}{AB} = \frac{2}{3}.$$

Проведем через вершину B прямую, параллельную стороне CD, до пересечения с основанием AD в точке P. Тогда $AP = AD - DP = AD - BC = 2\sqrt{39}$.

Из прямоугольного треугольника ABP находим, что $AB = AP\cos 30^\circ = 3\sqrt{13}$. Поэтому $AK = 2 \cdot \frac{1}{3}AB = 2\sqrt{13}$.

По теореме косинусов из треугольника AKD находим

$$DK^2 = AK^2 + AD^2 - 2 \cdot AK \cdot AD \cdot \cos 30^\circ =$$
$$= 4 \cdot 13 + 9 \cdot 39 - 2 \cdot 2\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{39} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 169.$$

Следовательно, $DK = 13$.

3.95. $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}|\operatorname{ctg}\alpha|$. ▮ Пусть α — тупой угол и O_1, O_2 — центры окружностей (рис. 546). Поскольку треугольники BCD и DAB равны, то радиусы окружностей также равны. Отрезки O_1O_2 и BD взаимно перпендикулярны и O_1O_2 делится диагональю BD пополам, $\angle DO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle BO_1D = 180^\circ - \alpha$.

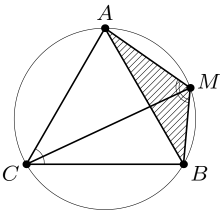


Рис. 547

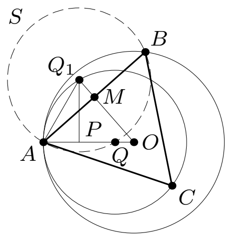


Рис. 548

Поэтому

$$O_1O_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BD \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = \\ = -BD \operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}\, \operatorname{ctg}\alpha.$$

Если α — острый угол, решение аналогично.

3.96. Пусть M — произвольная точка окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, лежащая на дуге AB, не содержащей точки C (рис. 547). Обозначим $AM = x$, $CM = z$, $BM = y$, $AB = BC = AC = a$. Воспользуемся известным равенством $z = x + y$ (см. задачу **2.369**). Поскольку $\angle AMC = \angle BMC = 60^\circ$, $\angle AMB = 120^\circ$, то по теореме косинусов из треугольника AMB находим, что

$$x^2 + y^2 + xy = a^2, \quad \text{или} \quad x^2 + y(x + y) = a^2.$$

Поскольку $x + y = z$, то $x^2 + yz = a^2$.

По теореме косинусов из треугольника CMB находим, что $z^2 + y^2 - zy = a^2$. Подставив вместо zy в это равенство $a^2 - x^2$, получим $z^2 + y^2 + x^2 = 2a^2$.

3.97. $\frac{rR\sqrt{3}}{\sqrt{r^2-rR+R^2}}$. ▮ Пусть окружности радиусов R и r с центрами соответственно O и Q касаются внутренним образом в точке A (рис. 548), точка B лежит на первой окружности, точка C — на второй, причем треугольник ABC — равносторонний. Пусть при повороте на 60° с центром A, переводящем точку C в точку B, вторая окружность переходит в окружность S с центром Q_1. Тогда AB — общая хорда окружности S и первой исходной окружности с центром O. Если M — середина этой хорды, то AM — высота треугольника OAQ_1 со сторонами $AO = R$ и $AQ_1 = r$ и углом $60°$ между ними. Пусть Q_1P — другая высота этого треугольника. Тогда из прямоугольного треугольника APQ_1 находим, что $Q_1P = AQ_1 \sin 60°$. Отрезок AM равен удвоенной площади треугольника OAQ_1, деленной на его основание OQ_1, т. е.

$$AM = \frac{AO \cdot Q_1P}{OQ_1} = \frac{AO \cdot AQ_1 \sin 60°}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos 60°}} = \frac{rR\sqrt{3}}{2\sqrt{r^2 - rR + R^2}}.$$

Следовательно, $AB = 2AM = \frac{rR\sqrt{3}}{\sqrt{r^2-rR+R^2}}$.

3.98. $a\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}\sin\alpha}{3}}$. ▮ Пусть P и Q — центры указанных равносторонних треугольников (рис. 549). Тогда $BQ = DP = \frac{a}{\sqrt{3}}$ и $BQ \parallel DP$. Поэтому отрезок PQ пересекает диагональ BD ромба в ее середине O и делится точкой O пополам. В треугольнике OBQ

$$BQ = \frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad BO = AB\sin\angle BAO = a\sin\frac{\alpha}{2},$$
$$\angle OBQ = \angle OBC + \angle QBC = \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) + 30° = 120° - \frac{\alpha}{2}.$$

По теореме косинусов находим

$$OQ^2 = BQ^2 + BO^2 - 2\cdot BQ\cdot BO\cdot\cos\angle OBQ =$$
$$= \frac{a^2}{3} + a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} - \frac{2a^2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(120° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a^2}{6}(2 + \sqrt{3}\sin\alpha).$$

Следовательно, $PQ = 2QO = a\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}\sin\alpha}{3}}$.

3.99. $\arcsin\frac{7\sqrt{3}-\sqrt{77}}{28} = \arccos\frac{7\sqrt{11}+\sqrt{21}}{28}$. ▮ *Первый способ.* Пусть O — центр окружности; P, Q — середины хорд NH и AF (рис. 550). Поскольку $KA\cdot FK = KN\cdot KH$, то $(\sqrt{11}-1)(\sqrt{11}+1) = 2(2+NH)$. Отсюда находим, что $NH = 3$, $KH = KN + NH = 5$.

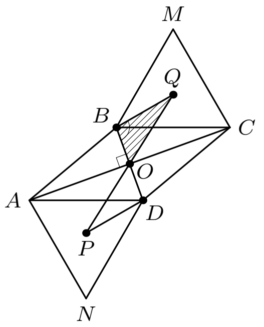


Рис. 549

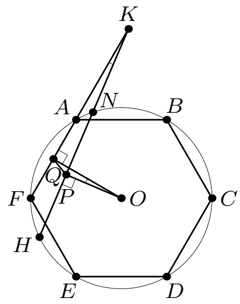


Рис. 550

Далее последовательно находим:

$$OQ = \sqrt{3},$$

$$KO = \sqrt{KQ^2 + OQ^2} = \sqrt{14}, \qquad OP = \sqrt{KO^2 - KP^2} = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\sin\angle QKO = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}}, \qquad \sin\angle PKO = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\cos\angle QKO = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{14}}, \qquad \cos\angle PKO = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$\sin\angle HKF = \sin(\angle QKO - \angle PKO) =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{3} - \sqrt{77}}{28}.$$

Второй способ. Выразим с помощью теоремы косинусов отрезок PQ из треугольников KPQ и OPQ и решим полученное уравнение относительно косинуса искомого угла.

3.100. 5 : 10 : 13. ▮ Пусть K, L и N — точки касания вписанной окружности со сторонами AC, BC и AB соответственно (рис. 551); F и Q — точки пересечения окружности с медианой BM (F — между B и Q). Предположим, что точка K расположена между точками M и C. Обозначим $BC = a$, $BF = FQ = QM = x$. Тогда $BL^2 = BQ \cdot BF = 2x^2$. Поэтому $BL = x\sqrt{2}$, $BN = BL = x\sqrt{2}$. Аналогично находим,

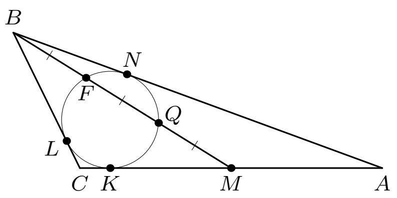


Рис. 551

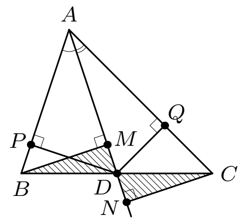


Рис. 552

что $KM = x\sqrt{2}$, а так как $CL = CK$, то

$$MC = BC = a, \qquad AC = 2a,$$
$$AB = AN + NB = a + x\sqrt{2} + x\sqrt{2} = a + 2x\sqrt{2}.$$

Выразим медиану BM через стороны треугольника ABC (см. задачу **3.66⁰**):

$$4\cdot BM^2 = 2BC^2+2AB^2-AC^2, \text{ или } 36x^2 = 2(a+2x\sqrt{2})^2+2a^2-4a^2.$$

Из этого уравнения находим, что $a = \frac{5x\sqrt{2}}{4}$. Тогда

$$BC = a = 5x\frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad AC = 2a = 5x\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$AB = a + 2x\sqrt{2} = 13x\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Следовательно, $BC : CA : AB = 5 : 10 : 13$.

3.101. $2\sqrt{10}$. ❚ Пусть P и Q — проекции точки D на AB и AC, M и N — проекции точек B и C на прямую AD (рис. 552). Обозначим $\angle BAD = \alpha$, $\angle CAD = \beta$, $AB = a$, $AC = b$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{AP}{AD} = \frac{4}{5}, \qquad \sin\alpha = \frac{3}{5},$$
$$\cos\beta = \frac{AQ}{AD} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}},$$
$$BM = AB\sin\alpha = \frac{3a}{5}, \qquad CN = AC\cdot\sin\beta = \frac{b}{\sqrt{5}}.$$

Из равенства прямоугольных треугольников CND и BMD следует, что $BM = CN$, т. е. $\frac{3a}{5} = \frac{b}{\sqrt{5}}$. Отсюда находим, что $b = \frac{3a}{\sqrt{5}}$.

Выразив равные отрезки BD и CD по теореме косинусов из треугольников BAD и CAD соответственно, получим уравнение:
$$a^2 + 25 - 2a \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = b^2 + 25 - 2b \cdot 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}.$$
Заменив b на $\frac{3a}{\sqrt{5}}$, найдем $a = 5$.

По теореме косинусов из треугольника BAD найдем $BD = \sqrt{10}$. Следовательно, $BC = 2\sqrt{10}$.

3.102. *Указание.* Выразите косинус угла ABC по теореме косинусов из треугольников ABC и ABD и приравняйте полученные выражения.

3.103. *Первый способ.* Заметим, что
$$\begin{aligned}a^4 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2b^2 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 &= \\ = (a^2+b^2-\sqrt{2}ab)(a^2+b^2+\sqrt{2}ab) &= \\ = (a^2+b^2-2ab\cos 45^\circ)(a^2+b^2-2ab\cos 135^\circ)&.\end{aligned}$$
Пусть
$$p = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 45^\circ}, \qquad q = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 135^\circ}.$$
Тогда $\sqrt[4]{a^4+b^4} = \sqrt{pq}$.

Отсюда вытекает следующее построение. Строим треугольник со сторонами a и b и углом 45° между ними. Тогда p — третья сторона этого треугольника. Отрезок q — третья сторона треугольника со сторонами a и b и углом 135° между ними. Наконец, искомый отрезок x строим как среднее геометрическое отрезков p и q (см. задачу **2.204**).

Второй способ. Пусть c — произвольный отрезок. Построим такие отрезки m и n, что $\frac{m}{a} = \frac{a}{c}$ и $\frac{n}{b} = \frac{b}{c}$ (см. задачу **2.545**). Тогда $m = \frac{a^2}{c}$ и $n = \frac{b^2}{c}$. Затем построим такой отрезок y, что
$$y = \sqrt{m^2+n^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{c}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{c}\right)^2},$$
далее — такой отрезок x, что
$$x = \sqrt{y \cdot c} = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{a^2}{c}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{c}\right)^2} \cdot c} = \sqrt[4]{a^4+b^4}.$$

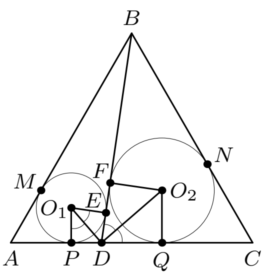


Рис. 553

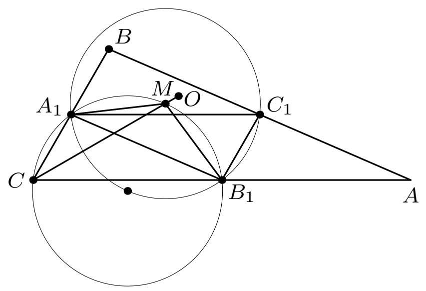


Рис. 554

3.104. $AB = BC = AC = 8$. ▮ Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, P и Q — их точки касания со стороной AC, E и F — с отрезком BD (рис. 553). Обозначим $DP = x$. Тогда $DQ = DF = DE + EF = DE + BE - BF = DE + BM - BN = x + 1$.

Обозначим $\angle BDC = \alpha$. Тогда $\angle O_2DQ = \frac{\alpha}{2}$, $\angle O_1DP = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ (так как $\angle O_1DO_2 = 90^\circ$). Поэтому

$$DQ = O_2Q \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \qquad DP = PO_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

или

$$x + 1 = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \qquad x = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Перемножив эти равенства почленно, получим уравнение $x(x+1) = 2$. Отсюда находим, что $x = 1$ (второй корень не подходит). Поэтому $BD = 7$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{7}$.

Обозначим $CQ = CN = y$. По теореме косинусов из треугольника BDC находим

$$(5+y)^2 = 49 + (2+y)^2 - 2\cdot 7\cdot(2+y)\cdot\frac{1}{7}.$$

Откуда $y = 3$. Аналогично находим, что $AP = AM = 2$. Следовательно, $AB = BC = AC = 8$.

3.105. 10. ▮ Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины BC, AC и AB соответственно, O — центр данной окружности, $\angle ACB = \alpha$ (рис. 554). Поскольку $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB = \alpha$, то треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику B_1A_1C. Следовательно, радиусы данной окружности и окружности, описанной около треугольника A_1B_1C, равны.

Пусть прямая OC пересекает вторую окружность в точке M. Тогда $MA_1 = MB_1$ (точка M лежит на биссектрисе угла ACB) и $OA_1 = OB_1$. Поэтому если точки O и M не совпадают, то $OC \perp A_1B_1$, а так как CO — биссектриса угла ACB, то $CA_1 = CB_1$ и $AC = BC = 4$. В этом случае $AC + BC = 4 + 4 = 8 < 2\sqrt{19} = AB$, что невозможно. Значит, предположение о том, что точки M и O не совпадают, не верно. Таким образом, центр второй окружности лежит на первой. Тогда $\angle A_1OB_1 + \angle A_1CB_1 = 180^\circ$, т. е. $2\alpha + \alpha = 180^\circ$ и $\alpha = 60^\circ$.

Обозначим $AC = x$. Тогда по теореме косинусов $x^2 + 16 - 4x = (2\sqrt{19})^2$. Из этого уравнения находим, что $x = 10$.

§ 3.3

3.106. 4. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой синусов.

3.107. $\frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. ▌ Пусть D — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC со сторонами $AB = AC = b$ и $BC = a$ (рис. 555). Из прямоугольного треугольника ADB находим, что $\cos\angle ABD = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2b}$. Тогда

$$\sin\angle ABC = \sin\angle ABD = \sqrt{1-\cos^2\angle ABD} = \sqrt{1-\frac{a^2}{4b^2}}.$$

Следовательно, если R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, то

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{b}{2\sqrt{1-a^2/(4b^2)}} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}.$$

3.108. 30° или 150°.

3.109. 30°. ▌ По теореме синусов $\frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B}$, или $\frac{1}{\sin\angle A} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$, откуда $\sin\angle A = \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\angle A = 30^\circ$ или $\angle A = 150^\circ$. Во втором случае $\angle A + \angle B = 150^\circ + 45^\circ$, что невозможно.

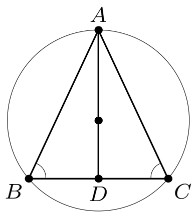


Рис. 555

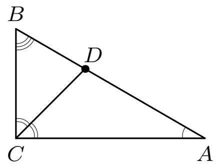


Рис. 556

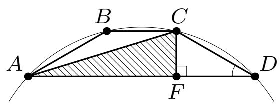


Рис. 557

3.110. $\frac{a(\sqrt{6}+3\sqrt{2})}{3}$. ▮ Пусть CD — биссектриса прямоугольного треугольника ABC (рис. 556), проведенная из вершины C прямого угла, $\angle A = 30^\circ$, $CD = a$. Из треугольника CBD по теореме синусов находим, что $\frac{BD}{\sin\angle BCD} = \frac{CD}{\sin\angle B}$, откуда

$$BD = \frac{CD\sin\angle BCD}{\sin\angle B} = \frac{a\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Аналогично из треугольника CAD находим, что $AD = a\sqrt{2}$. Следовательно,

$$AB = BD + AD = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + a\sqrt{2} = \frac{a(\sqrt{6}+3\sqrt{2})}{3}.$$

3.111. $\frac{65}{8}$. ▮ Пусть α — угол, противолежащий стороне, равной 15. Тогда по теореме косинусов

$$\cos\alpha = \frac{169+196-225}{2\cdot 13\cdot 14} = \frac{5}{13}.$$

Следовательно, если R — радиус окружности, описанной около данного треугольника, то

$$R = \frac{15}{2\sin\alpha} = \frac{15}{2\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}} = \frac{15}{2\cdot\frac{12}{13}} = \frac{65}{8}.$$

3.112. $\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}$. ▮ Пусть F — проекция конца C меньшего основания BC равнобокой трапеции $ABCD$ на большее основание AD (рис. 557). Тогда отрезок AF равен средней линии трапеции (см. задачу **2.118⁰**), а так как в прямоугольном

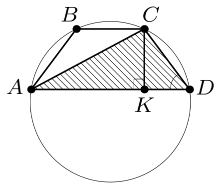


Рис. 558

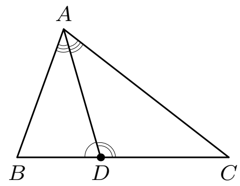


Рис. 559

треугольнике CFD угол D равен 30°, то $CF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}a$. Из прямоугольного треугольника ACF находим, что

$$AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Если R — радиус окружности, описанной около треугольника ACD, то

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle D} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Осталось заметить, что окружность, описанная около треугольника ACD, совпадает с окружностью, описанной около трапеции $ABCD$.

3.113. $\frac{85}{8}$. ▮ Из конца C меньшего основания BC трапеции $ABCD$ опустим перпендикуляр CK на большее основание AD (рис. 558). Тогда $CK = 8$. Если $AD = 21$, $BC = 9$, то

$$KD = \frac{AD - BC}{2} = 6, \qquad CD = \sqrt{CK^2 + DK^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$
$$\sin\angle D = \frac{CK}{CD} = \frac{4}{5}, \qquad AC = \sqrt{AK^2 + CK^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17.$$

Если R — радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, то $R = \frac{AC}{2\sin\angle D} = \frac{85}{8}$.

3.114. *Указание.* Примените формулу $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$.

3.115. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC (рис. 559). Применяя теорему синусов к треугольникам ABD и ACD, получим равенства

$$\frac{BD}{\sin\angle BAD} = \frac{AB}{\sin\angle ADB} \quad \text{и} \quad \frac{CD}{\sin\angle CAD} = \frac{AC}{\sin\angle ADC}.$$

Поскольку $\angle BAD = \angle CAD$ и $\sin\angle ADC = \sin(180^\circ - \angle ADB) = \sin\angle ADB$, то, разделив почленно первое равенство на второе, получим требуемое равенство $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

3.116. $\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\gamma+\beta)\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$. ▮ Пусть AD — биссектриса треугольника ABC, в котором $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ (рис. 560). По теореме синусов

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)},$$

откуда $AC = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$. По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle ADC = \angle ABD + \angle BAD = \beta + \frac{180^\circ - \beta - \gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

По теореме синусов из треугольника ADC находим, что $\frac{AD}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle ADC}$, откуда

$$AD = \frac{AC\sin\angle C}{\sin\angle ADC} = \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)\sin\left(90^\circ + \frac{\beta-\gamma}{2}\right)} = \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\gamma+\beta)\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

3.117. $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. *Указание.* На продолжении медианы AM за точку M отложите отрезок MK, равный AM, и примените теорему синусов к треугольнику ACK.

3.118. $\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}$. *Указание.* Докажите, что $CM = DM$, а DM найдите из треугольника ADM по теореме синусов.

3.119. $\frac{P\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$, $\frac{P\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$, $\frac{P\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$.
▮ Обозначим стороны треугольника, противолежащие углам α, β и γ, через a, b и c соответственно. По теореме синусов

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} \quad \text{и} \quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Поскольку $a + b + c = P$, имеем уравнение

$$a + \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = P,$$

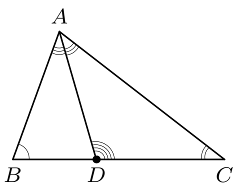


Рис. 560

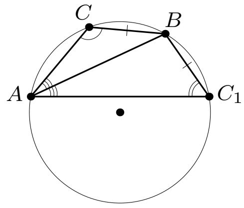


Рис. 561

откуда находим, что $a = \dfrac{P\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$. Аналогично находим b и c.

3.120. $b + \dfrac{a\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha}$. *Указание.* Через конец меньшего основания трапеции проведите прямую, параллельную противоположной боковой стороне.

3.121. $\sqrt{35} \pm \sqrt{15}$. ▮ Пусть $R = 12$ — радиус окружности (рис. 561). Тогда

$$AB = 2R\sin\angle ACB, \qquad BC = 2R\sin\angle BAC.$$

Отсюда находим, что $\sin\angle ACB = \dfrac{1}{4}$ и $\sin\angle BAC = \dfrac{1}{6}$. Поскольку сторона BC треугольника ABC не наибольшая, то угол A острый и его косинус положительный. Следовательно,

$$\cos\angle BAC = \sqrt{1-\sin^2\angle A} = \frac{\sqrt{35}}{6},$$
$$\cos\angle ACB = \pm\sqrt{1-\cos^2\angle B} = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Тогда

$$AC = 2R\sin\angle ABC = 2R\sin(\angle BAC + \angle ACB) =$$
$$= 2R(\sin\angle A\cos\angle C + \cos\angle A\sin\angle C) =$$
$$= 2\cdot 12\left(\pm\frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{35}}{6}\right) = \sqrt{35}\pm\sqrt{15}.$$

3.122. 4, $\dfrac{5\sqrt{41}}{4}$. ▮ Поскольку около трапеции можно описать окружность, то трапеция равнобокая. Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей. Точка касания вписанной окружности делит боковую сторону на отрезки 2 и 8. Поэтому $r = \sqrt{2\cdot 8} = 4$.

Диагональ трапеции — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 8 (высота трапеции, опущенная из конца меньшего основания на большее) и 10 (проекция диагонали на большее основание, равная длине средней линии). Эта диагональ видна из конца большего основания трапеции под углом α, синус которого равен $4/5$ (угол боковой стороны с основанием). Следовательно,

$$R = \frac{\sqrt{8^2+10^2}}{2\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{41}}{8/5} = \frac{5\sqrt{41}}{4}.$$

3.123. $\frac{c}{\sqrt{3}}$. ▮ Точка C лежит на окружности, описанной около построенного равностороннего треугольника ($60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$). Поэтому искомое расстояние равно радиусу этой окружности, т. е.

$$R = \frac{c}{2\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

3.124. 1. ▮ Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC со сторонами $AC = 1$, $AB = 2$ и углом CAB, равным 60° (рис. 562). По теореме косинусов находим, что $BC = \sqrt{3}$. Поскольку O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC,

$$\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle CAB = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

(см. задачу $\mathbf{1.116^0}$). Если R — искомый радиус, то

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BOC} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 120^\circ} = 1.$$

3.125. Разделим почленно данное равенство на равенство $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Получим равенство $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$. Поскольку каждый из углов α и β меньше 180°, то $\alpha = \beta$. Следовательно, данный треугольник равнобедренный.

3.126. $\sqrt{b(a+b)}$. ▮ Обозначим через α угол, лежащий против стороны, равной b. По теореме синусов $\frac{a}{\sin 3\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha}$. Поскольку

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha(2\cos 2\alpha + 1),$$

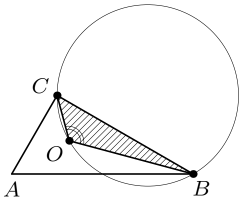


Рис. 562

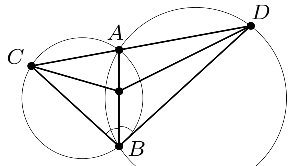


Рис. 563

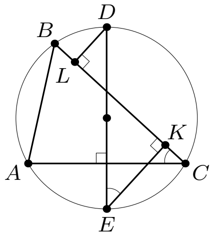


Рис. 564

то $2b\cos 2\alpha = a - b$. Тогда по теореме косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 2\alpha = a^2 + b^2 - a(a-b) = b^2 + ab = b(a+b).$$

3.127. Пусть точка C лежит на окружности радиуса r, а точка D — на окружности радиуса R (рис. 563). Тогда

$$BC = 2r\sin\angle BAC,$$
$$BD = 2R\sin\angle BAD = 2R\sin(180^\circ - \angle BAC) = 2R\sin\angle BAC.$$

Поэтому $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{r}{R} = \dfrac{AC}{AD}$. Значит, BA — биссектриса треугольника BCD (см. задачу **2.575⁰**), а так как биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, то биссектрисы углов C и D пересекаются на отрезке AB.

3.128. Пусть боковая сторона трапеции образует с меньшим основанием угол, равный α. Для обеих трапеций этот угол один и тот же, а диагональ равна произведению диаметра окружности на синус этого угла.

3.129. Пусть DE — диаметр описанной окружности, перпендикулярный стороне AC треугольника ABC (рис. 564), R — радиус этой окружности, LK — проекция диаметра DE на прямую BC. Тогда

$$LK = DE\sin\angle DEK = 2R\sin\angle DEK = 2R\sin\angle BCA = AB.$$

3.130. Пусть h_1 и h_2 — высоты треугольника ABC, проведенные из вершин A и C соответственно, a и c — длины отрезков, соединяющих проекции оснований этих высот на стороны треугольника. Поскольку вершина треугольника, основание

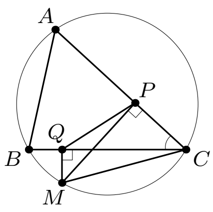


Рис. 565

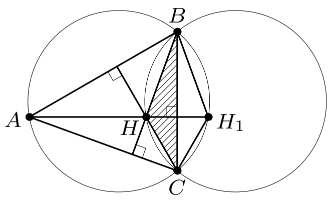


Рис. 566

соответствующей высоты и проекции основания этой высоты на стороны треугольника лежат на одной окружности, то

$$a = h_1 \sin\angle A, \qquad c = h_2 \sin\angle C,$$

а так как $\dfrac{h_1}{\sin\angle C} = \dfrac{h_2}{\sin\angle A} = AC$, то $a = c$.

3.131. Пусть P и Q — проекции точки M на прямые AC и BC (рис. 565). Тогда точки M, P, Q и C лежат на окружности с диаметром MC. Следовательно, $PQ = MC\sin\angle ACB$. Поэтому PQ максимально, если MC максимально, т. е. когда MC — диаметр описанной окружности треугольника ABC.

3.132. *Первый способ.* Пусть H_1 — точка, симметричная точке H относительно прямой BC (рис. 566). Тогда $\angle BH_1C = \angle BHC = 180^\circ - \angle A$, поэтому точка H_1 лежит на описанной окружности треугольника ABC. Следовательно, описанная окружность треугольника BHC симметрична описанной окружности треугольника ABC относительно прямой BC. Остальное аналогично.

Второй способ. Пусть R и R_1 — радиусы описанных окружностей треугольников ABC и BHC соответственно. Тогда

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle A} = \frac{BC}{2\sin\angle BHC} = R_1.$$

Остальное аналогично.

3.133. $\frac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$. ▌ Пусть $\angle ACB = \alpha$. Тогда $\angle ABC = 2\alpha$. По теореме синусов имеем:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin 2\alpha}, \quad \text{где} \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Поэтому $\cos\alpha = \dfrac{b}{2a}$. Тогда $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2a}$. Если R — радиус

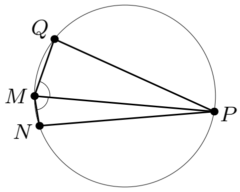


Рис. 567

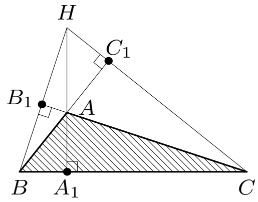


Рис. 568

окружности, то

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

3.134. $2\sqrt{\frac{34}{15}}$. ❚ Обозначим $\angle NMP = \angle PMQ = \alpha$ (рис. 567). Выразим равные отрезки NP и PQ по теореме косинусов из треугольников NMP и PMQ соответственно:

$$NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2NM \cdot MP\cos\alpha,$$
$$PQ^2 = MP^2 + MQ^2 - 2MP \cdot MQ\cos\alpha.$$

Приравняв правые части полученных равенств, получим уравнение, из которого найдем, что $\cos\alpha = 1/4$. Тогда $\sin\alpha = \sqrt{15}/4$. Если R — искомый радиус, то

$$R = \frac{NP}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{15}/2} = 2\sqrt{\frac{34}{15}}.$$

3.135. $\frac{25}{\sqrt{39}}$. ❚ *Первый способ.* Обозначим $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ (рис. 568). По теореме косинусов найдем косинусы этих углов:

$$\cos\alpha = -\frac{7}{20}, \qquad \cos\beta = \frac{5}{8}, \qquad \cos\gamma = \frac{19}{20}.$$

Поскольку $\cos\alpha < 0$, то треугольник ABC тупоугольный. Поэтому точка H пересечения прямых, содержащих высоты AA_1, BB_1 и CC_1, лежит вне треугольника ABC.

Из прямоугольных треугольников CB_1B и BC_1H находим:

$$BB_1 = BC\cos\beta = 6 \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{4},$$

$$BH = \frac{BB_1}{\cos\angle HBB_1} = \frac{BB_1}{\cos\angle ACB_1} = \frac{BB_1}{\cos(\angle BCB_1 - \gamma)} =$$
$$= \frac{BB_1}{\cos(90^\circ - \beta - \gamma)} = \frac{BB_1}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{BB_1}{\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma} = \frac{25}{\sqrt{39}}.$$

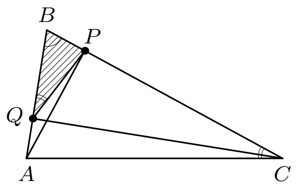


Рис. 569

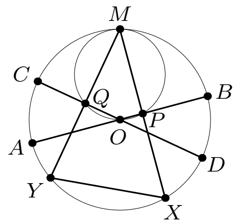


Рис. 570

Второй способ. Расстояние BH от вершины B до точки H пересечения прямых, содержащих высоты треугольника ABC, равно удвоенному расстоянию от центра O описанной окружности до стороны AC.

Если R — радиус этой окружности, то

$$AO = R = \frac{AB}{2\sin\gamma} = \frac{20}{\sqrt{39}}.$$

Следовательно,

$$BH = 2\sqrt{OA^2 - \frac{AB^2}{4}} = 2\sqrt{\frac{400}{39} - \frac{25}{4}} = \frac{25}{\sqrt{39}}.$$

3.136. $\frac{9}{2}$. ▮ Треугольники BPQ и BAC (рис. 569) подобны (по двум углам). Поскольку отношение их площадей равно $\frac{2}{18} = \frac{1}{9}$, то коэффициент подобия равен $\frac{1}{3}$. Значит, $AC = 3PQ = 6\sqrt{2}$. С другой стороны, коэффициент подобия равен $\frac{BP}{AB} = \cos\angle B$. Поэтому $\cos\angle B = \frac{1}{3}$. Тогда $\sin\angle B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Если R — радиус описанной окружности треугольника ABC, то $R = \frac{AC}{2\sin\angle B} = \frac{9}{2}$.

3.137. Если O — центр данной окружности, а R — ее радиус, то точки P, M, Q, O лежат на окружности с диаметром $MO = R$ (рис. 570). Поэтому

$$PQ = MO\sin\angle AOD = R\sin\angle AOD.$$

3.138. По данному углу α при вершине A искомого треугольника ABC и данному радиусу R описанной окружности построим противоположную сторону BC искомого треугольника.

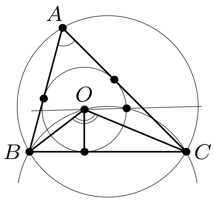


Рис. 571

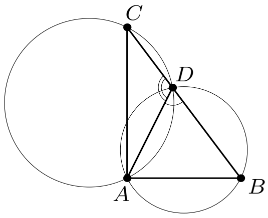


Рис. 572

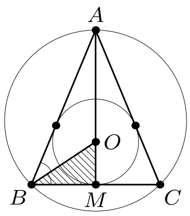


Рис. 573

Для этого построим прямоугольный треугольник по гипотенузе, равной $2R$, и острому углу α. Тогда катет, противолежащий углу α, равен стороне BC искомого треугольника ABC.

Затем построим на найденной стороне BC (рис. 571) как на хорде дугу, вмещающую угол $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ (если O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, то $\angle BOC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$). Каждая точка пересечения этой дуги с прямой, параллельной прямой BC и отстоящей от нее на расстояние, равное данному радиусу вписанной окружности, есть центр вписанной окружности искомого треугольника.

Проведем эту окружность и построим к ней касательные из точек B и C. Пересечение этих касательных есть вершина A искомого треугольника ABC.

3.139. $\frac{br}{c}$. ▮ Поскольку $\angle ADC + \angle ADB = 180^\circ$ (рис. 572), то $\sin\angle ADC = \sin\angle ADB = \frac{c}{2r}$. Если R — радиус окружности, проходящей через точки A, C и D, то $b = 2R\sin\angle ADC$. Отсюда находим, что

$$R = \frac{b}{2\sin\angle ADC} = \frac{br}{c}.$$

3.140. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha$. ▮ Обозначим основание BC равнобедренного треугольника ABC (рис. 573) через a, радиусы вписанной и описанной окружностей — r и R, центр вписанной окружности — O, середину BC — M. Тогда

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{a}{2\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{a}{2\sin 2\alpha},$$

$$r = OM = BM\operatorname{tg}\Big(\frac{1}{2}\angle B\Big) = \frac{a}{2\cdot\operatorname{tg}(\alpha/2)}.$$

Следовательно, $\frac{r}{R} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha$.

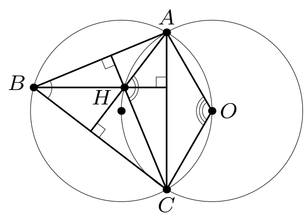


Рис. 574

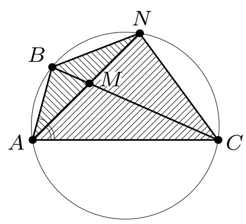


Рис. 575

3.141. $\sqrt{3}$. ▮ Если H — точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 574), то $\angle AHC = 180^\circ - \angle ABC$. Тогда

$$\angle AOC = \smile AHC = 360^\circ - 2\angle AHC = 2\angle ABC,$$

где O — центр второй окружности. Поскольку $\angle AOC + \angle ABC = 180^\circ$, то $3\angle ABC = 180^\circ$. Следовательно, $\angle ABC = 60^\circ$. Тогда

$$AC = 2R\sin\angle ABC = 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

3.142. 2. ▮ Пусть $AN = x$, R — радиус описанной окружности (рис. 575). Тогда

$$BN = 2R\sin 30^\circ = R, \qquad CN = 2R\sin 45^\circ = R\sqrt{2}.$$

По теореме косинусов для треугольников ABN и ACN:

$$BN^2 = R^2 = AB^2 + AN^2 - 2AB \cdot AN\cos 30^\circ = 1 + x^2 - x\sqrt{3},$$
$$CN^2 = 2R^2 = 6 + x^2 - 2\sqrt{6}x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6 + x^2 - 2x\sqrt{3}.$$

Из полученной системы уравнений находим, что $x^2 = 4$. Следовательно, $x = 2$.

3.143. Прямая без точки и точка C. ▮ Если $BC > AC$, то построим произвольную окружность, проходящую через точки B и C. Тогда существует окружность того же радиуса, проходящая через точки A и C. Аналогично для случая $BC \leqslant AC$. Поэтому точка C принадлежит искомому геометрическому месту точек.

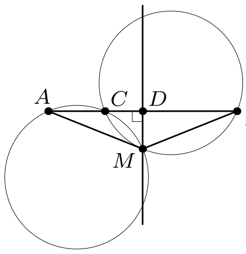


Рис. 576

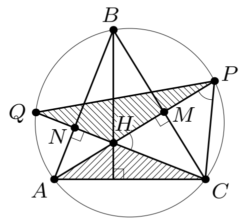


Рис. 577

Пусть M — произвольная точка искомого геометрического места точек, отличная от C и от середины D отрезка AB (рис. 576). Тогда $\angle MAB = \angle MBA$ (как углы, вписанные в равные окружности и опирающиеся на равные дуги). Следовательно, треугольник AMB равнобедренный и точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

Пусть теперь P — произвольная точка серединного перпендикуляра к отрезку AB, отличная от его середины D. Тогда радиусы окружностей, описанных около треугольников ACP и BCP, равны, так как

$$\frac{PC}{2\sin\angle PAC} = \frac{PC}{2\sin\angle PBC}.$$

Следовательно, точка P принадлежит рассматриваемому геометрическому месту точек.

3.144. $\frac{5a}{8}$. ▮ Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 577). Тогда треугольник QHP подобен треугольнику AHC с коэффициентом $\frac{QP}{AC} = \frac{6}{5}$.

Поскольку $\angle PCB = \angle PAB = \angle QCB$, то CM — биссектриса и высота треугольника HCP. Поэтому $HM = MP$. Тогда

$$\cos\angle APC = \cos\angle MHC = \frac{HM}{HC} = \frac{HP/2}{HC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{HP}{HC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5} = \frac{3}{5},$$

а $\sin\angle APC = 4/5$. Если R — искомый радиус, то

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle APC} = \frac{a}{8/5} = \frac{5a}{8}.$$

3.145. 17. ◀ *Первый способ.* Пусть AD, BE и CF — высоты остроугольного треугольника ABC (рис. 578); $DF = 8$, $EF = 15$, $DE = 17$. Поскольку $8^2 + 15^2 = 17^2$, то треугольник DEF прямоугольный, $\angle DFE = 90^\circ$. Обозначим через α угол C треугольника ABC. Тогда треугольник CDE подобен треугольнику CAB (по двум углам) с коэффициентом $k = \frac{CE}{BC} = \cos\angle BCE = \cos\alpha$.

Поскольку

$$90^\circ = \angle DFE = 180^\circ - \angle AFE - \angle BFD = 180^\circ - 2\alpha$$

(см. задачу **2.613⁰**), то $\alpha = 45^\circ$.

Пусть R_1 и R — радиусы окружностей, описанных около треугольников CDE и CAB. Тогда

$$R_1 = \frac{DE}{2\sin\angle DCE} = \frac{17}{2\sin 45^\circ} = \frac{17}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $R = \frac{R_1}{k} = \frac{17}{\sqrt{2}} / \cos 45^\circ = 17$.

Второй способ. Образы H_1, H_2 и H_3 точки H пересечения высот треугольника ABC (см рис. 578) при симметрии относительно прямых BC, AC и AB расположены на окружности, описанной около треугольника ABC (см. задачу **2.644⁰**), поэтому искомый радиус равен радиусу окружности, описанной около треугольника $H_1H_2H_3$. Этот треугольник подобен прямоугольному треугольнику FDE с коэффициентом 2. Значит, треугольник $H_1H_2H_3$ прямоугольный, его гипотенуза H_2H_3 равна 34, а радиус описанной окружности равен 17.

3.146. $\sqrt{rR}$, $\sqrt{\frac{r}{R}}$. ◀ Обозначим $\angle ACN = \alpha$, $\angle ADN = \beta$ (рис. 579). Тогда

$$AC = 2R\sin\alpha, \qquad AD = 2r\sin\beta, \qquad \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AD}{\sin\alpha},$$

или

$$\frac{2R\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{2r\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Отсюда находим, что $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{r}{R}}$. Если R_1 — радиус

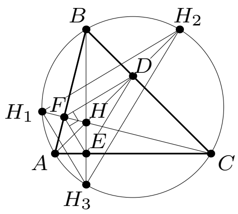


Рис. 578

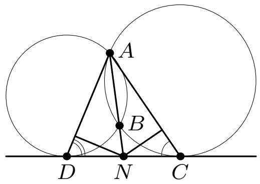


Рис. 579

окружности, описанной около треугольника ACD, то

$$R_1 = \frac{AC}{2\sin\beta} = \frac{2R\sin\alpha}{2\sin\beta} = R\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{rR}.$$

По теореме о касательной и секущей

$$CN^2 = NA\cdot NB \quad \text{и} \quad DN^2 = NA\cdot NB.$$

Поэтому $CN = DN$. Если h_1 и h_2 — указанные высоты, то

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{CN\sin\alpha}{DN\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{r}{R}}.$$

3.147. $\frac{rR}{r+R}$. ▌ *Первый способ.* Обозначим $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ (рис. 580, *а*), O_1, O_2, O_3 — центры указанных равных окружностей, вписанных в углы A, B и C соответственно, M — их общая точка, x — искомый радиус. Поскольку x — радиус окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$, то

$$O_2O_3 = 2x\sin\angle O_2O_1O_3 = 2x\sin\alpha,$$

$$a = 2R\sin\alpha, \qquad \sin\alpha = \frac{a}{2R}, \qquad O_2O_3 = \frac{ax}{R}.$$

С другой стороны,

$$x\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + x\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + O_2O_3 = a, \qquad r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + r\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = a,$$

или

$$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{a}{r}.$$

Поэтому $\frac{ax}{r} + \frac{ax}{R} = a$. Следовательно, $x = \frac{rR}{r+R}$.

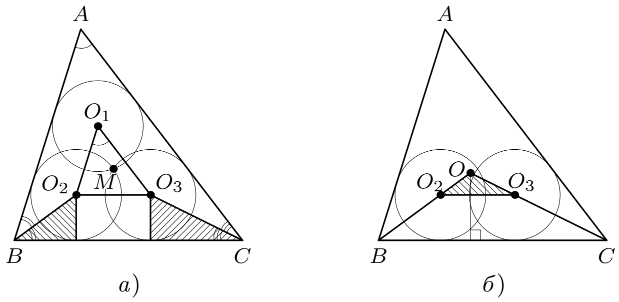


Рис. 580

Второй способ. Будем считать известным, что $O_2O_3 = \frac{ax}{R}$ (см. первый способ). Лучи BO_2 и CO_3 пересекаются в центре O вписанной окружности треугольника ABC (рис. 580, *б*). Высоты подобных треугольников OO_2O_3 и OBC, проведенные из общей вершины O, относятся как основания этих треугольников. Поэтому $\frac{r-x}{r} = \frac{O_2O_3}{a} = \frac{x}{R}$. Отсюда находим, что $x = \frac{rR}{R+r}$.

3.148. $\sqrt{\frac{6}{5}}$. ▮ Пусть M — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABKC$ (рис. 581). Обозначим $\angle BAK = \alpha$. Тогда

$$\angle KMC = \angle AMB = 60^\circ - \alpha,$$
$$\angle BCK = 180^\circ - \angle KMC - \angle MKC = 90^\circ + \alpha.$$

Применяя теорему синусов к треугольникам ABK и BCK, получим

$$\frac{BK}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{3}, \qquad \frac{BK}{\cos\alpha} = \frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

откуда находим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$. Значит, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Следовательно,

$$BK = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\alpha = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

3.149. 12,5. ▮ Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 582), Q — центр окружности, проходящей через точки C, O и M (пересечение биссектрисы угла A

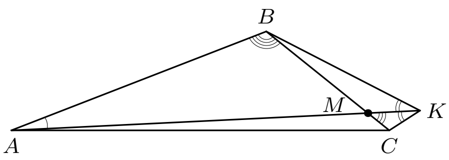


Рис. 581

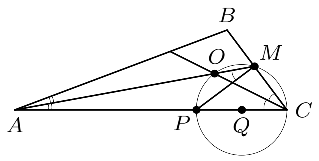


Рис. 582

со стороной BC), CP — диаметр этой окружности. Обозначим $\angle OCA = \angle OCB = \alpha$. Тогда

$$\angle OMP = \angle OCP = \alpha, \qquad \angle AMC = \angle AMP + \angle PMC = \alpha + 90^\circ,$$

$$\angle MAC = 180^\circ - \angle AMC - \angle MCA = \\ = 180^\circ - (\alpha + 90^\circ) - 2\alpha = 90^\circ - 3\alpha,$$

$$\angle BAC = 2\angle MAC = 180^\circ - 6\alpha,$$

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle ACB - \angle BAC = \\ = 180^\circ - 2\alpha - (180^\circ - 6\alpha) = 4\alpha.$$

По теореме синусов в треугольнике ABC имеем:

$$\frac{AB}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin 4\alpha}, \qquad \text{или} \qquad \frac{20}{\sin 2\alpha} = \frac{24}{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}.$$

Отсюда находим, что

$$\cos 2\alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}, \qquad \sin 2\alpha = \frac{4}{5}.$$

Если R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, то $R = \dfrac{AB}{2\sin 2\alpha} = \dfrac{25}{2}$.

3.150. $\sqrt{3}$. ▮ Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей (рис. 583), вписанных в треугольники ABD и ACD. Поскольку $\angle AO_1D = \angle AO_2D = 135^\circ$ (см. задачу **1.116⁰**), то точки A, O_1, O_2 и D лежат на одной окружности. Пусть O — центр этой окружности, R — ее радиус. Тогда

$$AD = 2R\sin\angle AO_1D, \quad \text{или} \quad 2 = 2R\sin 135^\circ.$$

Откуда находим, что $R = \sqrt{2}$.

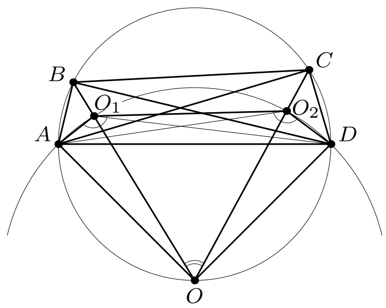


Рис. 583

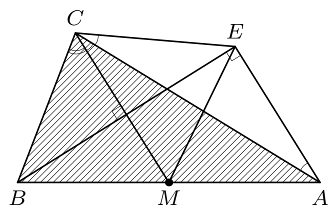


Рис. 584

Поскольку $\angle AOD = 90^\circ$, то точка O лежит на окружности, описанной около данного четырехугольника $ABCD$; $\angle O_1OO_2 = 60^\circ$ ($O_1O_2 = R = \sqrt{2}$) и $AO = OD$. Тогда CO и BO — биссектрисы углов ACD и ABD. Поэтому BO_1O — одна прямая и CO_2O — одна прямая. Поскольку $\angle BOC = 60^\circ$, то

$$BC = AD \sin 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

3.151. *Первый способ.* Предположим, что нужный треугольник ABC построен (рис. 584). Пусть $BC = a$ и $AC = b$ — его данные стороны, CM — медиана. Обозначим $\angle ACM = \alpha$, $\angle BCM = 2\alpha$. Если E — точка, симметричная вершине B относительно прямой CM, то

$$CE = CB = a, \qquad \angle ECM = \angle BCM = 2\alpha,$$
$$\angle ECA = \angle ECM - \angle ACM = 2\alpha - a = \alpha.$$

Поскольку $ME = MB = MA$, то $\angle AEB = 90^\circ$. Поэтому $AE \parallel MC$, $\angle EAC = \angle MCA = \alpha$. Следовательно, треугольник AEC — равнобедренный, т. е. $AE = EC = a$.

Отсюда вытекает следующее построение. Строим равнобедренный треугольник ACE по трем сторонам. Через вершину C проводим прямую, параллельную AE. Образ точки E при симметрии относительно этой прямой есть искомая вершина B.

Второй способ. Предположим, что нужный треугольник ABC построен. Пусть $BC = a$ и $AC = b$ — его данные стороны, CM — медиана. Обозначим $\angle ACM = \alpha$, $\angle BCM = 2\alpha$.

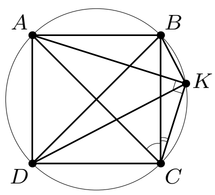


Рис. 585

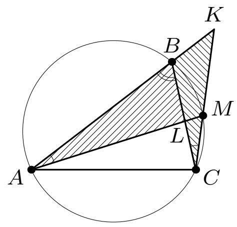


Рис. 586

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $BCAD$. По теореме синусов из треугольника BCD находим, что $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin 2\alpha}$, откуда $\cos\alpha = \frac{b}{2a}$. Следовательно, угол α можно построить. Поскольку $0 < 3\alpha < 180°$, то $0 < \alpha < 60°$. Поэтому задача имеет решение (и притом единственное) при $\frac{b}{2a} > \frac{1}{2}$, или $b > a$.

3.152. Пусть $CK < AK$ (рис. 585). Обозначим $\angle ACK = \varphi$. Тогда $\varphi > 45°$. Точка K лежит на окружности, описанной около данного квадрата. Если R — радиус этой окружности, то

$$BK = 2R\sin\angle BCK = \\ = AC\sin(\varphi - 45°) = AC\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\right) = \\ = \frac{AC\sin\varphi - AC\cos\varphi}{\sqrt{2}} = \frac{AK - CK}{\sqrt{2}},$$

$$DK = 2R\sin\angle KCD = AC\sin(45° + \varphi) = \\ = \frac{AC\cos\varphi + AC\sin\varphi}{\sqrt{2}} = \frac{CK + AK}{\sqrt{2}}.$$

3.153. $\frac{ab}{c}$. ▮ Обозначим $\angle BAM = \angle BCM = \alpha$, $\angle ABL = \varphi$ (рис. 586). По теореме синусов из треугольников ABL и BCK находим, что

$$\frac{BL}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\varphi} \quad \text{и} \quad \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin(180° - \varphi)}.$$

Поскольку $\sin\varphi = \sin(180° - \varphi)$, то, разделив почленно полученные равенства, найдем, что $\frac{BL}{b} = \frac{a}{c}$, откуда $BL = \frac{ab}{c}$.

3.154. $\dfrac{1}{4\cos^2\alpha}$. ▮ Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 587). Тогда

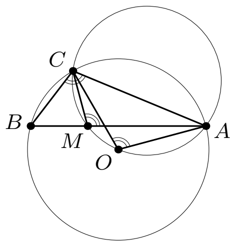


Рис. 587

$$\angle AMC = \angle AOC = 2\angle ABC = 2\alpha,$$
$$\angle BMC = \angle AMC - \angle MBC = 2\alpha - \alpha = \alpha.$$

Значит, CM — биссектриса треугольника ACB. Следовательно,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

Поэтому

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha} = \frac{1}{4\cos^2\alpha}.$$

§ 3.4

3.155. Прямоугольный треугольник. *Указание.* Воспользуйтесь формулой $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

3.156. $\frac{120}{17}$. ▮ Пусть a и b — катеты данного треугольника ($a = 15$, $b = 8$), c — гипотенуза ($c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{225+64} = 17$), h — искомая высота, S — площадь треугольника. Тогда $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$. Откуда $h = \frac{ab}{c} = \frac{15\cdot 8}{17} = \frac{120}{17}$.

3.157. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. *Указание.* Докажите, что треугольник ABE равнобедренный.

3.158. *Указание.* Площадь четырехугольника с вершинами в серединах данного выпуклого четырехугольника в два раза меньше площади данного четырехугольника (см. задачу **2.478**).

3.159. $\frac{\sqrt{15}}{2}$. ▮ Пусть в треугольнике ABC известны стороны $AB = 1$, $AC = \sqrt{15}$ и медиана $AM = 2$ (рис. 588). На продолжении медианы AM за точку M отложим отрезок MK, равный AM. Тогда четырехугольник $ABKC$ — параллелограмм, поэтому $CK = AB = 1$. Площадь треугольника ABC равна площади треугольника ACK, все стороны которого известны: $AK = 2AM = 4$, $AC = \sqrt{15}$, $CK = 1$. Поскольку $AK^2 = AC^2 + CK^2$ $(16 = 15 + 1)$, то треугольник ACK прямоугольный

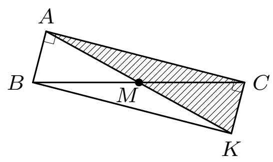


Рис. 588

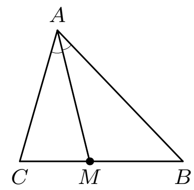


Рис. 589

($\angle ACK = 90°$), следовательно, его площадь равна половине произведения катетов, т. е.

$$S_{ABC} = S_{ACK} = \frac{1}{2}AC \cdot CK = \frac{1}{2}\sqrt{15} \cdot 1 = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

3.160. $\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}$. *Указание.* Выразите через a и b высоту равнобедренного треугольника, проведенную к основанию, и запишите двумя способами площадь треугольника.

3.161. $\frac{ab\sin\alpha}{a+b}$. *Указание.* Соедините вершину данного угла с центром полукруга; сложите площади полученных треугольников.

3.162. а) $\frac{24\sqrt{3}}{7}$. ▮ Поскольку $S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM}$ (рис. 589), то

$$\frac{1}{2}AB \cdot AC\sin\angle BAC = \\ = \frac{1}{2}AB \cdot AM\sin\angle BAM + \frac{1}{2}AM \cdot AC\sin\angle CAM,$$

или

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot AM \cdot \sin 30° + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot AM \cdot \sin 30°,$$

или $12\sqrt{3} = \frac{7}{2}AM$. Следовательно, $AM = \frac{24\sqrt{3}}{7}$.

б) $\frac{2ab\cos(\alpha/2)}{a+b}$.

3.163. а) 37,2. ▮ Пусть AB и CD — боковые стороны трапеции $ABCD$, AD и BC — основания, причем $AB = 3$, $CD = 4$, $AD = 18$, $BC = 13$ (рис. 590). Через вершину C проведем прямую, параллельную боковой стороне AB, до пересечения с основанием AD в точке K. Тогда треугольник CKD прямоугольный,

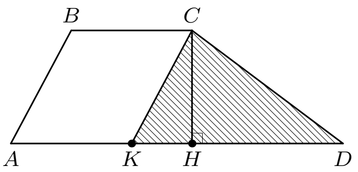


Рис. 590

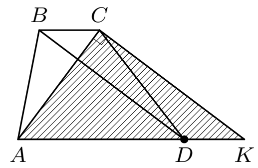


Рис. 591

так как $DK^2 = CK^2 + CD^2$ $(25 = 9 + 16)$. Его высота CH, проведенная к гипотенузе DK, равна $\frac{3\cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$ (см. задачу **3.156**). Следовательно, если S — площадь трапеции $ABCD$, то

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)CH = \frac{1}{2}(18 + 13) \cdot \frac{12}{5} = 37{,}2.$$

б) 450. ▮ Через конец C меньшего основания трапеции $ABCD$ $(BC = 16,\ AD = 44,\ AB = 17,\ CD = 25)$ проведем прямую, параллельную стороне AB, до пересечения с основанием AD в точке K (см. рис. 590). В треугольнике CKD

$$CK = 17, \qquad CD = 25, \qquad KD = AD - BC = 28.$$

Найдем его площадь по формуле Герона:

$$S = \sqrt{35 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 18} = 5 \cdot 7 \cdot 6 = 210.$$

Если CH — высота этого треугольника, то

$$CH = \frac{2S}{KD} = 2 \cdot \frac{210}{28} = 15.$$

Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)CH = 450$.

3.164. $\frac{c^2 \sin(\alpha+\gamma)\sin\alpha}{2\sin\gamma}$.

3.165. а) 54. ▮ Через конец C (рис. 591) меньшего основания BC трапеции $ABCD$ $(BC = 4,\ AD = 11,\ AC = 9,\ BD = 12)$ проведем прямую, параллельную диагонали BD, до пересечения с прямой AD в точке K. В треугольнике ACK известно, что $AC = 9$, $CK = BD = 12$, $AK = AD + DK = AD + BC = 11 + 4 = 15$. Поэтому треугольник ACK прямоугольный $(AK^2 = AC^2 + CK^2)$. Его площадь равна половине произведения катетов, т. е. $\frac{1}{2}AC \cdot CK = 54$. Площадь трапеции $ABCD$ равна площади этого треугольника (см. задачу **2.467**).

б) $12\sqrt{5}$. ▮ Через конец C меньшего основания BC трапеции $ABCD$ ($BC = 3$, $AD = 6$, $BD = 8$, $AC = 7$) проведем прямую, параллельную диагонали BD, до пересечения с прямой AD в точке K (см. рис. 591). Стороны треугольника ACK равны: $AC = 7$, $CK = BD = 8$, $AK = AD + DK = AD + BC = 6 + 3 = 9$. Найдем его площадь по формуле Герона:

$$S_{ABC} = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 6 \cdot 2\sqrt{5} = 12\sqrt{5}.$$

Следовательно, $S_{ABCD} = S_{ACK} = 12\sqrt{5}$.

3.166. 1024. *Указание.* Через вершину меньшего основания трапеции проведите прямую, параллельную диагонали.

3.167. $\sqrt{\dfrac{4S^2}{b^2 \sin^2 \alpha} + b^2 - 4S \operatorname{ctg} \alpha}$. *Указание.* Выразите сторону BC через данные величины и воспользуйтесь теоремой косинусов.

3.168. $\sqrt{29}$ или $\sqrt{5}$. *Указание.* Воспользуйтесь формулой $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ и теоремой косинусов.

3.169. 18. *Указание.* Медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

3.170. $\frac{29}{5}$. *Указание.* Соедините данную точку M с вершинами треугольника ABC и рассмотрите площади трех образовавшихся треугольников.

3.171. 13, 15.

3.172. 14, 30, 40. ▮ Пусть a, b и c — искомые стороны треугольника, являющиеся основаниями треугольников с площадями 28, 60 и 80 соответственно, r — радиус вписанной окружности данного треугольника. Тогда

$$\frac{ar}{2} = 28, \qquad \frac{br}{2} = 60, \qquad \frac{cr}{2} = 80.$$

Из этих равенств выразим a, b и c через r:

$$a = \frac{56}{r}, \qquad b = \frac{120}{r}, \qquad c = \frac{160}{r}.$$

По формуле Герона выразим через r площадь данного треугольника:

$$28 + 60 + 80 = \sqrt{\frac{168}{r} \cdot \frac{112}{r} \cdot \frac{48}{r} \cdot \frac{8}{r}}.$$

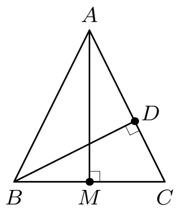


Рис. 592

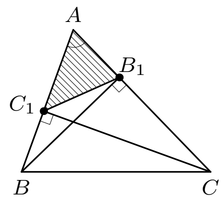


Рис. 593

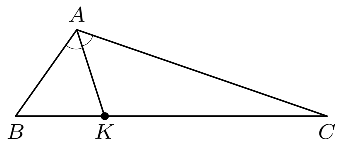


Рис. 594

Из полученного уравнения находим, что $r = 4$. Следовательно, $a = 14$, $b = 30$, $c = 40$.

3.173. $\frac{a^2h}{4\sqrt{a^2-h^2}}$. ▮ Пусть $BD = h$ — высота, проведенная к боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием $BC = a$ (рис. 592). Обозначим через x высоту AM, проведенную к основанию. Тогда $AC = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$, а так как $BC \cdot AM = AC \cdot BD$, имеем уравнение $h \cdot \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = ax$, откуда находим, что $x = \frac{ah}{2\sqrt{a^2-h^2}}$. Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AM = \frac{ax}{2} = \frac{a^2h}{4\sqrt{a^2-h^2}}.$$

3.174.

$$\frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\alpha}, \quad \frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\beta}, \quad \frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\gamma}.$$

▮ Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, а высоты, опущенные на эти стороны — x, y и z соответственно. Тогда

$$c = \frac{x}{\sin\beta}, \qquad b = \frac{x}{\sin\gamma}, \qquad S = \frac{1}{2}cb\sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Отсюда находим, что $x^2 = \frac{2S\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Следовательно,

$$x = \frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\alpha}.$$

Аналогично найдем y и z.

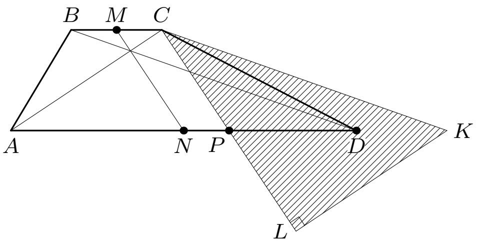


Рис. 595

3.175. $\dfrac{2S\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}$, $\dfrac{2S\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}$, $\dfrac{2S\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$.

3.176⁰. $S\cos^2\alpha$. ▮ Поскольку треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\dfrac{AB_1}{AB} = |\cos\alpha|$ (рис. 593), то

$$S_{AB_1C_1} = \left(\frac{AB_1}{AB}\right)^2 S_{ABC} = S\cos^2\alpha.$$

3.177. 235,2. ▮ Пусть AK — биссектриса треугольника ABC, $AC = 35$, $AB = 14$, $AK = 12$ (рис. 594). Обозначим $\angle CAB = 2\alpha$. Поскольку $S_{ABC} = S_{ACK} + S_{ABK}$, то

$$\frac{1}{2}AC \cdot AB\sin 2\alpha = \frac{1}{2}AC \cdot AK\sin\alpha + \frac{1}{2}AB \cdot AK\sin\alpha.$$

Применив формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, найдем из полученного уравнения, что $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. Отсюда следует, что $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ и $\sin 2\alpha = \dfrac{24}{25}$. Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot AB\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 14 \cdot \frac{24}{25} = 235{,}2.$$

3.178. 6. ▮ Пусть M и N — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ с диагоналями $AC = 3$ и $BD = 5$, а $MN = 2$ (рис. 595). Через вершину C проведем прямую, параллельную диагонали BD, до пересечения с прямой AD в точке K, и прямую, параллельную MN, до пересечения с AD в точке P. Тогда трапеция $ABCD$ равновелика треугольнику ACK (см. задачу **2.467**). Так как

$$AP = AN + NP = AN + MC =$$
$$= \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(AD + DK) = \frac{1}{2}AK,$$

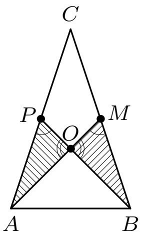


Рис. 596

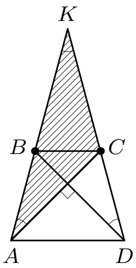


Рис. 597

то P — середина AK. На продолжении медианы CP треугольника ACK отложим отрезок PL, равный CP. Четырехугольник $ACKL$ — параллелограмм, поэтому треугольник ACK равновелик прямоугольному треугольнику CLK ($CL = 4$, $KL = 3$, $CK = 5$), площадь которого равна 6. Следовательно, площадь трапеции $ABCD$ также равна 6.

3.179. $\frac{2}{3}$. ▮ Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 596). Треугольники AOP и BOM подобны (по двум углам). Поэтому $AO : OB = PO : OM$. Следовательно, $AO \cdot OM = BO \cdot OP$, или $\frac{2}{9}AM^2 = \frac{2}{9}BP^2$ (так как медианы делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника). Поэтому $AM = BP$. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный. Пусть $MC = x$. Тогда $AC = 2x$. По теореме косинусов

$$AM^2 = CM^2 + AC^2 - 2CM \cdot AC \cdot \cos\angle ACB,$$

$$1 = x^2 + 4x^2 - 2x \cdot 2x \cdot \frac{4}{5},$$

откуда находим, что $x^2 = \frac{5}{9}$. Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \sin\angle C = \frac{1}{2} \cdot (2x)^2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6x^2}{5} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2}{3}.$$

3.180. $\frac{3}{2}P$ или $\frac{1}{2}P$. ▮ Пусть $BC < AD$. Поскольку $\angle BAC = \angle CDB$ (рис. 597), то около трапеции $ABCD$ можно описать окружность. Поэтому трапеция равнобокая. Следовательно, треугольники AKD и BKC равнобедренные. Поскольку

$$\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ,$$

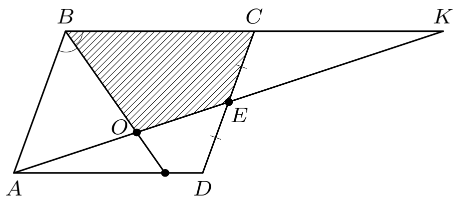


Рис. 598

то треугольник ACK равнобедренный, $CK = AC$. Тогда

$$S_{BKC} = \frac{1}{2}CK^2 \sin 30^\circ = \frac{1}{4}CK^2,$$

а так как

$$P = S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2}CK^2,$$

то $S_{BKC} = \frac{1}{2}P$. Следовательно, $S_{AKD} = \frac{1}{2}P + P = \frac{3}{2}P$. Если $BC > AD$, аналогично получим, что $S_{AKD} = \frac{1}{2}P$.

3.181. $\frac{ab(3a-b)\sin 2\alpha}{2(a+b)}$. ▮ Поскольку $\angle ABC = 2\alpha$ и $CD = 2DE = 2b$ (рис. 598), то $S_{ABCD} = 2ab\sin 2\alpha$.

Пусть K — точка пересечения прямых BC и AE. Поскольку треугольники DEA и CEK равны, то

$$S_{CEK} = S_{DEA} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{2}ab\sin 2\alpha,$$

$$S_{ABK} = S_{ABCD} = 2ab\sin 2\alpha.$$

По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{OK}{AK} = \frac{BK}{BK + AB} = \frac{a}{a+b}.$$

Поэтому

$$S_{BOK} = \frac{OK}{AK}S_{ABK} = 2a^2b\sin 2\alpha \cdot \frac{a}{a+b}.$$

Следовательно,

$$S_{OBCE} = S_{BOK} - S_{CEK} =$$

$$= 2a^2b\sin 2\alpha\frac{a}{a+b} - \frac{1}{2}ab\sin 2\alpha = \frac{ab(3a-b)\sin 2\alpha}{2(a+b)}.$$

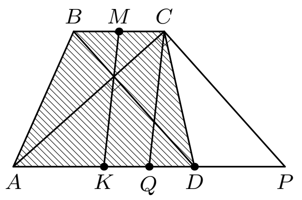


Рис. 599

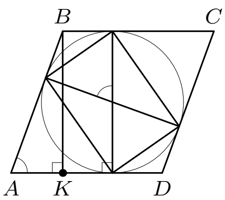


Рис. 600

3.182. $9\sqrt{5}$. ▮ Пусть M и K — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ (рис. 599). Через вершину C меньшего основания BC проведем прямую, параллельную диагонали BD ($BD = 6$), до пересечения с прямой AD в точке P и прямую, параллельную MK, до пересечения с прямой AD в точке Q. Тогда

$$AQ = AK + KQ = AK + MC = \\ = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD + DP) = \frac{1}{2}AP.$$

Поэтому CQ — медиана треугольника ACP, а так как $\angle ACP = 90^\circ$, то $AQ = QP = CQ = 4{,}5$. Поэтому $AP = 9$. Тогда $AC = \sqrt{AP^2 - CP^2} = \sqrt{81 - 36} = 3\sqrt{5}$. Следовательно,

$$S_{ABCD} = S_{ACP} = \frac{1}{2}AC \cdot CP = 3\sqrt{5} \cdot \frac{6}{2} = 9\sqrt{5}.$$

3.183. $\frac{4R^3}{S}$. ▮ В данный параллелограмм $ABCD$ вписана окружность, поэтому $ABCD$ — ромб (рис. 600). Пусть BAD — его острый угол. Четырехугольник с вершинами в точках касания — прямоугольник с диагоналями, равными $2R$. Обозначим угол между ними через α. Тогда $\angle BAD = \alpha$. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 2R \cdot \sin\alpha = 2R^2 \sin\alpha,$$

откуда $\sin\alpha = \frac{S}{2R^2}$.

Пусть K — проекция точки B на сторону AD. Тогда

$$AB = \frac{BK}{\sin\angle A} = \frac{2R}{\sin\alpha} = \frac{4R^3}{S}.$$

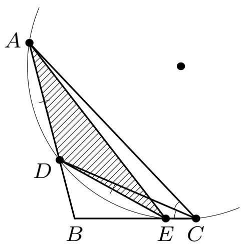


Рис. 601

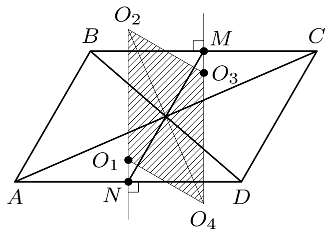


Рис. 602

3.184. $\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$. ▮ По свойству биссектрисы треугольника $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{2}{1}$ (рис. 601). Тогда $DE=AD=4$. Поскольку четырехугольник $ADEC$ — вписанный, то $\sin\angle ADE=\sin\angle ACB$. По теореме косинусов из треугольника ABC находим:

$$\cos\angle ACB=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{11}{16}.$$

Тогда $\sin\angle ACB=\dfrac{3\sqrt{15}}{16}$. Следовательно,

$$S_{ADE}=\frac{1}{2}AD\cdot DE\sin\angle ADE=\frac{1}{2}AD\cdot DE\sin\angle ACB=\frac{3\sqrt{15}}{2}.$$

3.185. $\operatorname{ctg}^2\alpha$. ▮ Рассмотрим четырехугольник, вершины которого — точки пересечения четырех серединных перпендикуляров к сторонам данного параллелограмма (рис. 602). Это также параллелограмм, и его вершины — это точки O_1, O_2, O_3 и O_4. Острый угол между его сторонами равен α.

Если a и b — стороны исходного параллелограмма, то высоты полученного равны $a\cos\alpha$ и $b\cos\alpha$, поскольку каждая такая высота равна катету прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной средней линии исходного параллелограмма, и острым углом α. Тогда стороны полученного параллелограмма равны $a\operatorname{ctg}\alpha$ и $b\operatorname{ctg}\alpha$. Следовательно, его площадь равна $ab\operatorname{ctg}^2\alpha\sin\alpha$, а площадь исходного параллелограмма равна $ab\sin\alpha$.

3.186. $2\operatorname{ctg}^2\alpha$. ▮ Пусть d_1 и d_2 — диагонали четырехугольника $ABCD$ (рис. 603). Новый четырехугольник — параллелограмм. Его высоты равны проекциям диагоналей друг на друга,

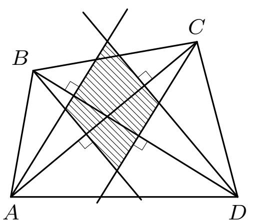


Рис. 603

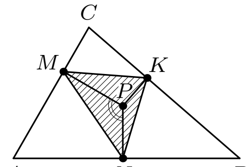


Рис. 604

т. е. $d_1 \cos \alpha$ и $d_2 \cos \alpha$, а стороны — $d_1 \operatorname{ctg} \alpha$ и $d_2 \operatorname{ctg} \alpha$. Острый угол между сторонами равен α. Значит, площадь нового четырехугольника равна $d_1 d_2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin \alpha$, а площадь исходного четырехугольника равна $\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$.

3.187. $\frac{abc}{kmc+nma+knb}$. ▌ Пусть S — площадь треугольника ABC; K, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ соответственно; $PK = k$, $PM = m$, $PN = n$ (рис. 604). Тогда

$$S_{KMN} = S_{MPN} + S_{KPN} + S_{MPK} =$$
$$= \frac{1}{2} mn \sin(180^\circ - \angle A) + \frac{1}{2} kn \sin(180^\circ - \angle B) +$$
$$+ \frac{1}{2} km \sin(180^\circ - \angle C) =$$
$$= \frac{1}{2}(mn \sin \angle A + kn \sin \angle B + km \sin \angle C) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2mnS}{bc} + \frac{2knS}{ac} + \frac{2kmS}{ab}\right) =$$
$$= S\left(\frac{mn}{bc} + \frac{kn}{ac} + \frac{km}{ab}\right) = S \cdot \frac{mna + knb + kmc}{abc}.$$

3.188. Пусть a, b, c, d — последовательные стороны данного четырехугольника, α, β, γ, δ — углы между соседними сторонами (α — угол между сторонами, равными a и b, β — между b и c и т. д.), S — его площадь. Тогда

$$2S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha + \frac{1}{2} bc \sin \beta + \frac{1}{2} cd \sin \gamma + \frac{1}{2} ad \sin \delta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}(ab + bc + cd + ad) = \frac{1}{2}(a + c)(b + d) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{(a + c) + (b + d)}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 16 = 2.$$

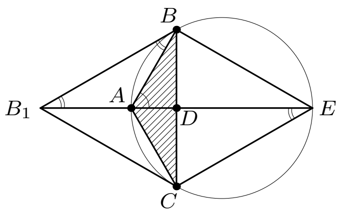


Рис. 605

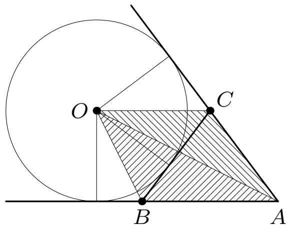


Рис. 606

Следовательно, $S \leqslant 1$.

Площадь квадрата с периметром 4 равна 1.

3.189. Пусть α — наименьший угол треугольника. Тогда $\alpha \leqslant 60^\circ$. Если этот угол заключен между сторонами a и b, а S — площадь треугольника, то

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha \leqslant \frac{1}{2}\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Площадь равностороннего треугольника со стороной, равной 1, равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3.190. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. ▮ На продолжении отрезка EA за точку A отложим отрезок AB_1, равный AB (рис. 605). Тогда $B_1D = B_1A + AD = BA + AD = DE$. Следовательно, четырехугольник B_1BEC — параллелограмм. Тогда

$$\angle ABC = \angle B_1EC = \angle BB_1A = 30^\circ, \qquad \angle ADB = 90^\circ.$$

Поэтому AE — диаметр окружности, $\angle ABE = 90^\circ$, $AC = AB = \frac{AE}{2} = 3$. Следовательно, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC\sin\angle BAC = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

3.191. а) Пусть r_a — радиус вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC, равной a. Докажем, что $S = r_a(p-a)$. Соединим центр O этой окружности с вершинами треугольника (рис. 606). Тогда

$$S = S_{ABC} = S_{ABO} + S_{ACO} - S_{OBC} =$$
$$= \frac{1}{2}ABr_a + \frac{1}{2}ACr_a - \frac{1}{2}BCr_a = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)r_a = (p-a)r_a.$$

Аналогично, $S = r_b(p-b)$ и $S = r_c(p-c)$, где r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся

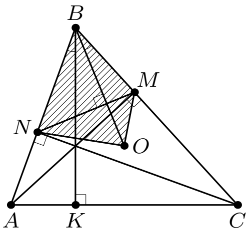


Рис. 607

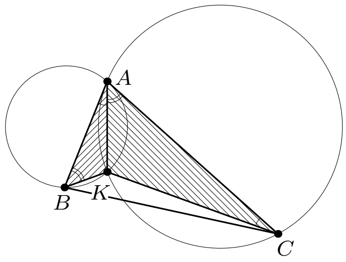


Рис. 608

сторон $AC = b$ и $AB = c$. Выразив r_a, r_b и r_c из доказанных формул, получим

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

б) По формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{S}{r} \cdot \frac{S}{r_a} \cdot \frac{S}{r_b} \cdot \frac{S}{r_c}} = \frac{S^2}{\sqrt{rr_ar_br_c}},$$

откуда находим, что $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$.

3.192. $2\sqrt{S\operatorname{tg}\beta}$. ▮ Пусть BK — третья высота треугольника ABC (рис. 607). Поскольку $\angle ABK = \angle OBC$ (см. задачу $\mathbf{2.645^0}$) и треугольники BNM и BCA подобны (см. задачу $\mathbf{2.548^0}$), то $BO \perp MN$. Поэтому

$$S = \frac{1}{2}MN \cdot BO = \frac{1}{2}AC\cos\beta \cdot \frac{AC}{2\sin\beta} = \frac{1}{4}AC^2\cos\beta.$$

Следовательно, $AC = 2\sqrt{S\operatorname{tg}\beta}$.

3.193. $\frac{5+\sqrt{15}}{4}$. ▮ Обозначим $\angle BAK = \alpha$, $\angle CAK = \beta$ (рис. 608). По тереме об угле между касательной и хордой $\angle ACK = \angle BAK = \alpha$ и $\angle ABK = \angle CAK = \beta$. Треугольники ABK и CAK подобны (по двум углам). Поэтому $\frac{BK}{AK} = \frac{AK}{KC}$. Отсюда находим, что $AK = \sqrt{BK \cdot KC} = 2$.

Поскольку $\operatorname{tg}\angle CAB = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\sqrt{15}} > 0$, то угол CAB острый. Тогда

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{15}}{4}, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{4}.$$

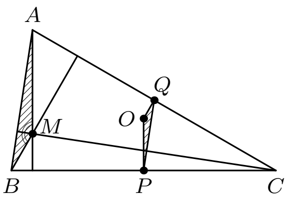


Рис. 609

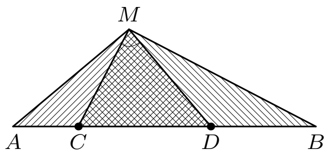


Рис. 610

По теореме косинусов из треугольника AKB находим, что

$$AB^2 = AK^2 + BK^2 - 2AK \cdot BK \cos \angle AKB =$$
$$= AK^2 + BK^2 - 2AK \cdot BK \cos(180^\circ - \alpha - \beta) =$$
$$= 4 + 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 5 + \sqrt{15}.$$

Из подобия треугольников ABK и CAK следует, что $AC = 2AB$. Поэтому

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC = AB^2 \sin \angle BAC = \frac{5 + \sqrt{15}}{4}.$$

3.194. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. ▮ Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 609), P и Q — проекции точки O на стороны BC и AC. Тогда (см. задачу **2.108⁰**)

$$BM = 2OQ = 2\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad AM = 2OP = 2\sqrt{2}.$$

Поскольку $\angle AMB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, то

$$S_{AMB} = \frac{1}{2} AM \cdot MB \sin 150^\circ = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

3.195. $\frac{1}{2}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{(S_1 + S_2)^2 - 4S_1S_2 \sin^2 \alpha}\right)$. ▮ Обозначим $AM = x$, $CM = y$, $DM = z$, $BM = t$, $S_{AMB} = S$ (рис. 610). Тогда

$$S_1 = \frac{1}{2} xz, \qquad S_2 = \frac{1}{2} yt, \qquad S_{CMD} = \frac{1}{2} yz \sin \alpha,$$
$$S_1 + S_2 - S_{CMD} = S,$$
$$S = \frac{1}{2} xt \sin \angle AMB = \frac{1}{2} xt \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} xt \sin \alpha.$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} xtyz = 4S_1S_2, \\ S_1 + S_2 - \frac{1}{2}yz\sin\alpha = S, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{2S}{\sin\alpha} \cdot yz = 4S_1S_2, \\ S_1 + S_2 - \frac{1}{2}yz\sin\alpha = S. \end{cases}$$

Выразим yz из первого уравнения и подставим во второе. Получим квадратное уравнение относительно S:

$$S^2 - (S_1 + S_2)S + S_1S_2\sin^2\alpha = 0.$$

Его корни:

$$S = \frac{1}{2}\left(S_1 + S_2 \pm \sqrt{(S_1 + S_2)^2 - 4S_1S_2\sin^2\alpha}\right).$$

Поскольку $S > S_1$ и $S > S_2$, то $S > \frac{1}{2}(S_1+S_2)$. Поэтому подходит только $\frac{1}{2}(S_1 + S_2 + \sqrt{(S_1 + S_2)^2 - 4S_1S_2\sin^2\alpha})$.

3.196. Пусть AC — диагональ вписанного четырехугольника $ABCD$ (рис. 611), $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$. Выразим AC^2 по теореме косинусов из треугольников ABC и ADC и, учитывая, что $\angle B + \angle D = 180^\circ$, получим

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd)\cos\angle B.$$

Тогда

$$\cos\angle B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)},$$

$$\sin^2\angle B = 1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)^2 =$$

$$= \frac{(2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2} =$$

$$= \frac{(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{4(ab + cd)^2} =$$

$$= \frac{((c + d)^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - (c - d)^2)}{4(ab + cd)^2} =$$

$$= \frac{(c + d - a + b)(c + d + a - b)(a + b - c + d)(a + b + c - d)}{4(ab + cd)^2} =$$

$$= \frac{4(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}{(ab + cd)^2}.$$

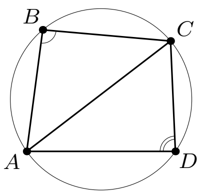


Рис. 611

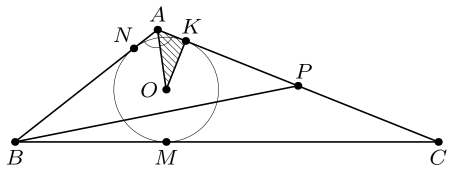


Рис. 612

Следовательно,

$$S = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}ab\sin\angle B + \frac{1}{2}cd\sin\angle D =$$

$$= \frac{1}{2}(ab+cd)\sin\angle B = \frac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{\frac{4(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ab+cd)^2}} =$$

$$= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

3.197. $4\sqrt{3}$. ▮ Обозначим через x расстояние от вершины угла в 120° до ближайшей точки касания и применим теорему косинусов. Получим уравнение: $x^2+7x-4=0$. Отсюда находим, что $x = \frac{\sqrt{65}-7}{2}$.

Если r — радиус вписанной окружности, то $r = x\sqrt{3}$. Площадь S треугольника найдем по формуле: $S = pr$, где p — полупериметр треугольника.

3.198. $\sqrt{91}$. ▮ Пусть O — центр окружности (рис. 612), K, M, N — точки касания со сторонами AC, BC, AB. Тогда

$$OK = r = AO\sin 60^\circ = \sqrt{3}, \qquad AK = AN = 1.$$

Если p — полупериметр треугольника ABC, то $S_{ABC} = pr$. Отсюда находим, что $p = 15$.

Обозначим $BM = BN = x$, $CM = CK = y$. Тогда

$$\begin{cases} x+y+1 = 15, \\ (x+y)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (x+1)(y+1). \end{cases}$$

Решив полученную систему уравнений, найдем: $x = 9$, $y = 5$ или $x = 5$, $y = 9$.

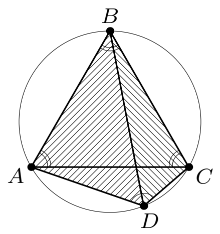


Рис. 613

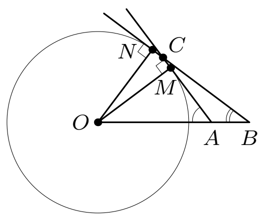


Рис. 614

Поскольку $AC > AB$, то условию задачи удовлетворяет только второе решение этой системы: $x = 5$, $y = 9$. Тогда $AB = 6$, $AC = 10$. Если P — середина AC, то

$$BP^2 = AB^2 + AP^2 - 2AB \cdot AP \cos 120^\circ = 91.$$

3.199. $AB = BC = 7\sqrt{3}$, $CD = \sqrt{21}$, $AD = 2\sqrt{21}$. ▮ Если R — радиус окружности ($R = 7$), то

$$AC = 2R \sin \angle ADC = 2 \cdot 7 \cdot \sin 120^\circ = 7\sqrt{3}.$$

Поскольку $\angle ABC = 180^\circ - \angle ADC = 60^\circ$ (рис. 613), то $AB = BC = AC = 7\sqrt{3}$, а так как $\angle ADB = \angle CDB = 60^\circ$, то $\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AD}{DC} = 2$.

Пусть $DC = x$. Тогда $AD = 2x$, и по теореме косинусов в треугольнике ADC имеем:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD \cdot AD \cos \angle ADC,$$

$$(7\sqrt{3})^2 = 4x^2 + x^2 + 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \frac{1}{2}.$$

Отсюда находим, что $x^2 = 21$. Следовательно, $CD = x = \sqrt{21}$, $AD = 2x = 2\sqrt{21}$.

3.200. $\frac{150}{7}$. ▮ Обозначим через M и N (рис. 614) точки касания окружности с прямыми, проходящими через точки A и B соответственно, $\angle OAM = \alpha$, $\angle OBN = \beta$. Тогда $\frac{OM}{OA} = \sin\alpha$, $\frac{ON}{OB} = \sin\beta$. Поэтому

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \qquad \sin\beta = \frac{3}{5}, \qquad \cos\alpha = \frac{3}{5}, \qquad \cos\beta = \frac{4}{5},$$

$$BC = \frac{AB\sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{AB\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} = \frac{100}{7}.$$

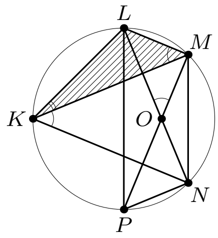


Рис. 615

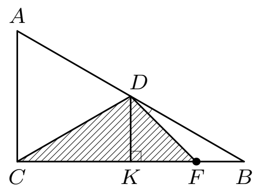


Рис. 616

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \sin\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{100}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{150}{7}.$$

3.201. 4. ▮ Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны. Поэтому $\smile KL = \smile MN = \smile KP$ и $\smile LM = \smile PN$ (рис. 615). Обозначим $\smile KL = \alpha$, $\smile LM = \beta$. Тогда

$$\angle LOM = \frac{1}{2}(\smile LM + \smile PN) = \beta = 45^\circ,$$

$$\smile LK + \smile KP + \smile MN = 3\alpha = 360^\circ - 2\beta = 270^\circ.$$

Поэтому $\alpha = 90^\circ$. Следовательно,

$$\angle KML = \frac{\alpha}{2} = 45^\circ, \qquad \angle LKM = \frac{\beta}{2} = 22{,}5^\circ.$$

Если R — радиус данной окружности, то

$$KL = 2R\sin 45^\circ,$$

$$KM = 2R\sin(180^\circ - 45^\circ - 22{,}5^\circ) = 2R\sin 112{,}5^\circ = 2R\cos 22{,}5^\circ.$$

Следовательно,

$$S_{KLM} = \frac{1}{2}KL \cdot KM \sin 22{,}5^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \sin 45^\circ \cdot 2R \cdot \cos 22{,}5^\circ \cdot \sin 22{,}5^\circ = R^2 \sin 45^\circ \sin 45^\circ = 4.$$

3.202. $\frac{\sqrt{3}+1}{8}$. ▮ Поскольку $DC = DB$ (рис. 616), то

$$\angle DCF = \angle ABC = 30^\circ, \qquad \angle DFC = \angle BDF + \angle DBF = 45^\circ,$$

$$\angle CDF = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ.$$

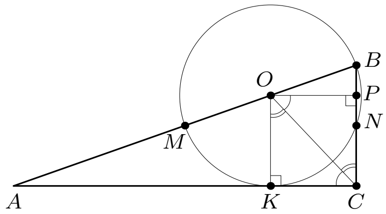


Рис. 617

Поскольку $CD = AC = 1$, то по теореме синусов из треугольника CDF находим:

$$CF = \frac{CD\sin 105^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}(\sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Высота DK треугольника ABC является средней линией треугольника ABC. Поэтому $DK = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$S_{CDF} = CF \cdot \frac{1}{2}DK = \frac{\sqrt{3}+1}{8}.$$

3.203. $16\sqrt{2}$. ▮ Пусть M и N — середины AB и BC соответственно (рис. 617). Тогда если R — радиус указанной окружности, то

$$NC = BN = 2R\sin\angle BMN = 2R\sin\angle BAC = 2\cdot 3\cdot\frac{1}{3} = 2.$$

Пусть P — проекция центра O окружности на сторону BC, а K — точка касания окружности со стороной AC. Тогда P — середина BN и $PC = CN + NP = 2 + 1 = 3$, $OK = 3$.

Прямоугольные треугольники POC и KCO равны по катету и гипотенузе, поэтому $\angle ACB = \angle KCO + \angle PCO = 90^\circ$. Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot BC = MN\cdot BC = 2R\sin\angle ABC\cdot BC =$$
$$= 2R\cos\angle BAC\cdot BC = 6\cdot 2\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 4 = 16\sqrt{2}.$$

3.204. Пусть KL — большее основание равнобедренной трапеции $KLMN$, вписанной в окружность (рис. 618). Тогда KL — диаметр окружности. Обозначим через α острый угол между диагоналями KM и LN трапеции. Пусть $KM = LN = d$. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}KM\cdot LN\sin\alpha = \frac{1}{2}d^2\sin\alpha.$$

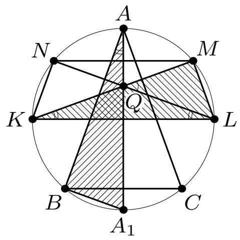


Рис. 618

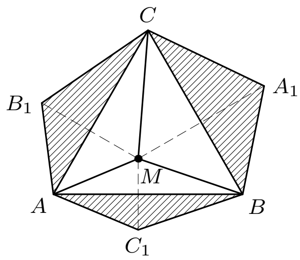


Рис. 619

Через вершину A данного равнобедренного треугольника ABC проведем диаметр AA_1. Если Q — точка пересечения диагоналей трапеции, то $\angle BAC = 2\angle BAA_1 = 2\angle MKL = \angle MQL = \alpha$.

Из равенства прямоугольных треугольников BAA_1 и MKL следует, что $AB = KM = d$. Поэтому

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \sin\angle BAC = \frac{1}{2}d^2 \sin\alpha.$$

Что и требовалось доказать.

3.205. $\frac{1}{4}(36\sqrt{6}+55\sqrt{3})$. ▮ Пусть M — точка внутри правильного треугольника ABC (рис. 619), причем $AM = 5$, $BM = 6$, $CM = 7$. Рассмотрим точки A_1, B_1 и C_1, симметричные точке M относительно прямых BC, AC и AB соответственно. В равнобедренных треугольниках AB_1C_1, BA_1C_1 и CA_1B_1 известны боковые стороны и углы при вершинах A, B и C, равные по 120°. Тогда площади этих треугольников равны соответственно $\frac{25\sqrt{3}}{4}$, $\frac{36\sqrt{3}}{4}$ и $\frac{49\sqrt{3}}{4}$. По теореме косинусов находим основания этих треугольников: $B_1C_1 = 5\sqrt{3}$; $A_1C_1 = 6\sqrt{3}$; $A_1B_1 = 7\sqrt{3}$. По формуле Герона находим, что площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна $18\sqrt{6}$. Тогда площадь шестиугольника $AB_1CA_1BC_1$ равна

$$25\frac{\sqrt{3}}{4} + 36\frac{\sqrt{3}}{4} + 49\frac{\sqrt{3}}{4} + 18\sqrt{6} = 110\frac{\sqrt{3}}{4} + 18\sqrt{6}.$$

Поскольку треугольники AB_1C, CA_1B и AC_1B соответственно равны треугольникам AMC, CMB и AMB, то площадь шестиугольника $AB_1CA_1BC_1$ вдвое больше площади S треугольника ABC. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}\left(110\frac{\sqrt{3}}{4} + 18\sqrt{6}\right) = \frac{1}{2}(55\sqrt{3} + 36\sqrt{6}).$$

3.206. Пусть угол между сторонами a и b равен α, тогда угол между сторонами c и d равен $180^\circ - \alpha$. Найдем по теореме косинусов квадрат диагонали, соединяющей вершины двух других углов:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha,$$

откуда $2(ab+cd)\cos\alpha = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$.

Поскольку в четырехугольник можно вписать окружность, то $a+c = b+d$, или $a-b = d-c$, откуда $a^2+b^2-2ab = c^2+d^2-2cd$, или $a^2+b^2-c^2-d^2 = 2(ab-cd)$.

Таким образом, $2(ab+cd)\cos\alpha = 2(ab-cd)$, откуда $\cos\alpha = \frac{ab-cd}{ab+cd}$.

Пусть S — площадь данного четырехугольника. Тогда

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{1}{2}(ab+cd)\cdot\sqrt{1-\left(\frac{ab-cd}{ab+cd}\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(ab+cd)^2-(ab-cd)^2} = \sqrt{abcd}.$$

3.207. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 620) и $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$. Рассмотрим четырехугольник AB_1CD, где точка B_1 симметрична вершине B относительно серединного перпендикуляра к диагонали AC.

$$S_{ABCD} = S_{AB_1CD} =$$
$$= \frac{1}{2}CB_1\cdot CD\sin\angle B_1CD + \frac{1}{2}B_1A\cdot AD\sin\angle B_1AD \leqslant \frac{ac+bd}{2}.$$

Равенство имеет место, если $\angle B_1CD = \angle B_1AD = 90^\circ$, т. е. четырехугольник AB_1CD — вписанный с двумя противоположными углами по 90°.

Поскольку диагональ AC видна из точек B и B_1 под одним углом, то четырехугольник $ABCD$ вписан в ту же окружность, а так как $AC \parallel BB_1$ и B_1D — диаметр, то угол между AC и BD равен углу B_1BD, т. е. 90°.

3.208. $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$. ▮ Пусть K — точка пересечения диагоналей AC и BE (рис. 621). Поскольку $S_{ABE} = S_{ABC}$, то $S_{AKE} = S_{BKC}$. Поэтому $AK\cdot KE = BK\cdot KC$, или $\frac{AK}{KC} = \frac{BK}{KE}$.

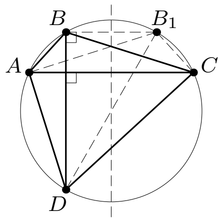


Рис. 620

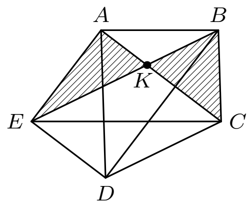


Рис. 621

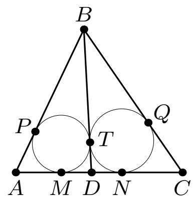


Рис. 622

Следовательно, EC параллельно AB. Аналогично докажем, что остальные диагонали также параллельны соответствующим сторонам.

Поскольку $DEKC$ — параллелограмм, то $S_{EKC} = S_{EDC} = 1$. Обозначим $S_{AKE} = x$. Тогда

$$\frac{S_{AKE}}{S_{AKB}} = \frac{EK}{KB} = \frac{x}{1-x} = \frac{S_{EKC}}{S_{CKB}} = \frac{1}{x}.$$

Из уравнения $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$ находим, что $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Следовательно,

$$S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{DEKC} + S_{AKE} = 1 + 2 + x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

3.209. $AB = \frac{21}{2}$, $BC = \frac{23}{2}$, $AC = 11$. ▮ Поскольку $DM = DN$, то окружности касаются BD в одной точке (рис. 622). Обозначим ее через T. Пусть P и Q — точки касания окружностей со сторонами AB и BC, $BP = BT = BQ = x$. Выразим площади треугольников ABD и BCD по формуле Герона: $S_1 = \sqrt{(x+5)\cdot x\cdot 2\cdot 3}$, $S_2 = \sqrt{(x+6)\cdot x\cdot 2\cdot 4}$. С другой стороны, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AD}{DC} = \frac{5}{6}$. Из полученного уравнения находим, что $x = \frac{15}{2}$. Следовательно, $AB = 3 + x = \frac{21}{2}$, $BC = 4 + x = \frac{23}{2}$.

3.210. $\frac{a}{2}$. ▮ Пусть O_1, O_2, O — центры данных полуокружностей S_1, S_2, S соответственно (рис. 623), r и R — радиусы полуокружностей S_1 и S_2, x — радиус искомой окружности, O_3 — ее центр. Тогда радиус полуокружности S равен $r + R$,

$$O_1O_3 = r + x, \qquad OO_3 = r + R - x, \qquad OO_1 = R,$$
$$O_2O_3 = R + x, \qquad OO_2 = r.$$

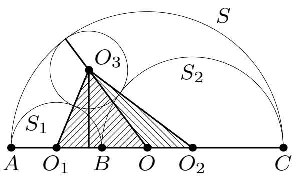


Рис. 623

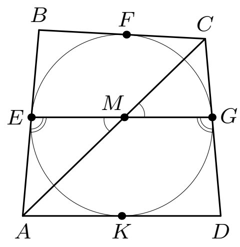


Рис. 624

По формуле Герона находим:

$$S_{OO_1O_3} = \sqrt{(r+R)(R-x)xr},$$
$$S_{OO_2O_3} = \sqrt{(r+R)(r-x)xR}.$$

Поскольку $S_{OO_1O_3} = \frac{aR}{2}$ и $S_{OO_2O_3} = \frac{ar}{2}$, то

$$(r+R)(R-r)xr - (r+R)(r-x)xR = \frac{a^2R^2}{4} - \frac{a^2r^2}{4}.$$

Из полученного уравнения находим, что $x = \frac{a}{2}$.

3.211. Пусть E, F, G и K — точки касания окружности со сторонами AB, BC, CD и AD описанного четырехугольника $ABCD$ (рис. 624), M — точка пересечения AC и EG. Тогда

$$\frac{S_{AEM}}{S_{CGM}} = \frac{AM \cdot EM \sin\angle AME}{CM \cdot GM \sin\angle CMG} = \frac{AE \cdot EM \sin\angle AEM}{CG \cdot GM \sin\angle CGM}.$$

Поскольку $\sin\angle AME = \sin\angle CMG$ и $\sin\angle AEM = \sin\angle CGM$, то из полученного равенства отношений следует, что $\frac{AM}{CM} = \frac{AE}{CG}$, т. е. прямая EG делит диагональ AC данного четырехугольника в отношении $\frac{AE}{CG}$.

Точно так же убеждаемся, что прямая FK делит ту же диагональ в отношении $\frac{AK}{CF}$, а так как $AE = AK$ и $CG = CF$, то $\frac{AK}{CF} = \frac{AE}{CG}$. Следовательно, прямая FK проходит через точку M.

Аналогично докажем, что BD проходит через точку пересечения EG и FK.

Список литературы

1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Ч. 1. Планиметрия. — М.: ГУПИ, 1936.
2. *Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И.* Геометрия 8–9. — М.: Просвещение, 1991.
3. *Атанасян Л. С. и др.* Геометрия. Учебник для 7–9 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Просвещение, 1995.
4. *Барыбин К. С.* Сборник задач по геометрии. Планиметрия. — М.: Учпедгиз, 1958.
5. *Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л.* Прямые и кривые. — М.: Наука, 1978.
6. *Гальперин Г. А., Толпыго А. К.* Московские математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1986.
7. *Гусев В. А., Орлов Ф. И., Розенталь Ф. Л.* Внеклассная работа по математике в 6–8 классах. — М.: Просвещение, 1977.
8. *Делоне Б., Житомирский О.* Задачник по геометрии. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
9. *Зетель С. И.* Новая геометрия треугольника. — М.: Учпедгиз, 1962.
10. *Зубелевич Г. И.* Сборник задач московских математических олимпиад. — М.: Просвещение, 1971.
11. *Коксетер Г. С., Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией. — М.: Наука, 1978.
12. *Куланин Е. Д., Федин С. Н.* Геометрия треугольника в задачах. Мин. нар. образования РСФСР. НИИ школ. — М., 1990.
13. *Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К.* Задачи вступительных экзаменов по математике. — М.: Наука, 1986.
14. *Петерсен Ю.* Методы и теории для решения геометрических задач на построение. — М.: 1892.
15. *Погорелов А. В.* Геометрия 7–11. — М.: Просвещение, 1996.

16. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. Ч. I. — М.: Наука, 1991.
17. *Пржевальский Е.* Собрание геометрических теорем и задач. — М., 1909.
18. *Рыбкин Н.* Сборник задач по геометрии для 6–9 классов средней школы. Ч. I. Планиметрия. — М.: Просвещение, 1964.
19. *Саранцев Г. И.* Сборник задач на геометрические преобразования. — М.: Просвещение, 1981.
20. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. Под ред. Сканави М. И. — М.: Высшая школа, 1988.
21. Факультативный курс по математике / Сост. Никольская И. Л. — М.: Просвещение, 1991.
22. *Фомин Д. В.* Санкт-Петербургские математические олимпиады. — СПб.: Политехника, 1994.
23. *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. — М.: Наука, 1986.
24. *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы планиметрии. — М.: Наука, 1967.
25. *Яковлев Г. Н., Купцов Л. П., Резниченко С. В., Гусятников П. Б.* Всероссийские математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1992.

Оглавление

Издательство МЦНМО представляет книги по математике для школьников и учителей

Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач. 2005

Бобров С. П. Волшебный двурог. 2006

Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. Симметрия в алгебре. 2002

Васильев Н. Б, Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые. 2006

Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. 2006

Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. Комбинаторика. 2006

Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э. Функции и графики (основные приемы). 2006

Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. 2006

Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. 2006

Гордин Р. К. Это должен знать каждый матшкольник. 2004

Евдокимов М. А. От задачек к задачам. 2004

Екимова М. А., Кукин Г. П. Задачи на разрезание. 2005

Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986–2005. 2006

Заславский А. А. Геометрические преобразования. 2004

Звонкин А. К. Малыши и математика. Домашний кружок для дошкольников. 2006

Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. 2006

Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка). 2006

Кулыгин А. К. (сост.). XXVII Турнир им. Ломоносова. 2005

Кулыгин А. К. (сост.). XXVIII Турнир им. Ломоносова. 2006

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? 2004

Московские математические олимпиады 1993–2005 г. 2006

Московские олимпиады по информатике. 2006

Понарин Я. П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. 2004

Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Т. 1, 2. 2004, 2006

Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. 2006

Шень А. Программирование: теоремы и задачи. 2004

Ященко И. В. Приглашение на математический праздник. 2005